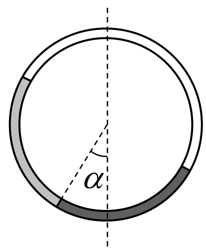
Решения и критерии оценки работ участников

Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике, 2020-2021 учебный год,

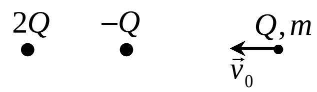
11 класс

1. Имеется два одинаковых сосуда, соединенные трубкой с клапаном. В одном сосуде содержится идеальный газ под давлением p, в другом сосуде – вакуум. Клапан пропускает газ из одного сосуда в другой при перепаде давлений $\Delta p = 2p$. Сосуды нагревают, увеличивая их абсолютную температуру в 3 раза. Найти давление газа в сосудах после этого.

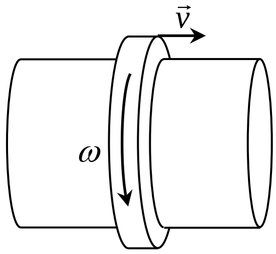
2. Кольцо изготовлено из длинной и тонкой трубки. В трубку залили равные объемы двух несмешивающихся жидкостей, которые в сумме занимают половину объема трубки. Кольцо расположили в вертикальной плоскости. При этом оказалось что угол, который составляет с вертикалью отрезок, соединяющий центр кольца и границу раздела жидкостей, равен α (см. рисунок). Найти плотность более тяжелой жидкости, если плотность более легкой равна ρ.



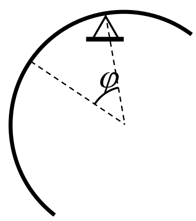
3. Два точечных заряда $2Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии l друг от друга. Из бесконечности на заряды вдоль их соединяющей прямой налетает заряд Q, имеющий массу m и начальную скорость v_0. При каком минимальном значении v_0 этот заряд сможет долететь до заряда $-Q$?



4. Тонкая массивная шайба надета без зазора на горизонтальный стержень радиуса R (см. рисунок). Если шайбу закрутить с угловой скоростью ω, она остановится через время t. Какой путь пройдет шайба вдоль стержня, если закрутить ее с угловой скоростью ω и одновременно сообщить ей скорость $\vec{v}$, направленную вдоль стержня?



5. Из тонкой проволоки изготовили полуокружность и разместили ее на точечной опоре так, как показано на рисунке (здесь φ - угол между направлением на середину полуокружности и точку контакта с опорой; см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения полуокружность сможет находиться в равновесии? При каком угле φ минимальное значение коэффициента трения, обеспечивающее равновесие, является наибольшим. Найти наибольшее значение минимального коэффициента трения, удерживающего полуокружность в равновесии.



Решения

1. Закон Клапейрона-Менделеева для начального состояния газа дает

$$pV = \nu RT \qquad (*)$$

где V - объем сосуда, ν - количество вещества газа в сосуде (число молей), T - начальная температура. При нагревании газа его давление будет возрастать, и когда оно достигнет значения $p_1 = \Delta p = 2p$, клапан начнет пропускать воздух во второй сосуд. При дальнейшем нагревании клапан будет пропускать такое количество воздуха, чтобы разность давлений в сосудах составляла $\Delta p = 2p$. Поэтому для конечного газа в сосудах получим

$$p_1 V = (\nu - \Delta\nu) RT_1$$
$$p_2 V = \Delta\nu RT_1$$

где p_1 и p_2 - давления газа в сосудах (p_1 - в том сосуде, в котором первоначально был воздух), $\Delta\nu$ - количество вещества газа, перетекшего во второй сосуд, $T_1 = 3T$ - конечная температура газа в сосудах. Учитывая, что $p_2 = p_1 - \Delta p$, получим

$$p_1 V = 3(\nu - \Delta\nu) RT$$
$$(p_1 - \Delta p) V = 3\Delta\nu RT$$

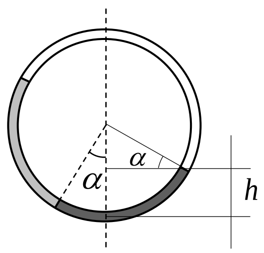
Складывая эти уравнения и используя уравнение , найдем

$$p_1 = \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\Delta p = \frac{5}{2}p \qquad p_2 = p_1 - \Delta p = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\Delta p = \frac{1}{2}p$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – клапан поддерживает разность давлений между отсеками, часть газа перетекает из одного отсека в другой – 0,5 балла
2. Правильное использование закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
3. Правильные уравнения для конечных состояний газа в отсеках – 0,5 балла
4. Правильный ортвет– 0,5 балла

2. В равновесии давления в правой и левой частях трубки равны друг другу Найдем каждое из них исходя из геометрии трубки.

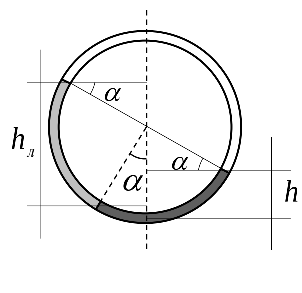


Давление в правой части (где находится более тяжелая жидкость) равно (см. рисунок 1)

$$p = \rho gh = \rho gR(1 - \sin\alpha) \qquad (*)$$

Давление в левой части трубки складывается из давления легкой и тяжелой жидкостей. Аналогично (*) находим давление более тяжелой жидкости

$$p_m = \rho gR(1 - \cos\alpha)$$



Учитывая, что столбик легкой жидкости опирается на угол 90°, получим геометрически (см. рисунок 2) для высоты столбика легкой жидкости

$$h_л = R(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

и ее давления

$$p_л = \rho_1 gR(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

где ρ_1 - плотность более легкой жидкости. В результате условие равновесия жидкости в трубке дает

$$p = p_т + p_л \qquad \Rightarrow \qquad \rho gR(1-\sin\alpha) = \rho gR(1-\cos\alpha) + \rho_1 gR(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

Отсюда находим

$$\rho_1 = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\rho$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное идея решения – равенство давлений жидкости, правильная формула для гидростатического давления – 0,5 балла
2. Правильный подсчет высот жидкости в правом и левом колене трубки – 0,5 балла
3. Правильное условие равновесия – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

3. Очевидно, на больших расстояниях от зарядов движущийся заряд отталкивается от них (их суммарный заряд имеет тот же знак), на малых – притягивается (из-за большей близости к заряду $-Q$). Поэтому если движущийся заряд преодолеет точку, в которой отталкивание сменяется притяжением, то он обязательно достигнет заряда $-Q$. Определим эту точку.

Используя закон Кулона, найдем расстояние от точки нулевой силы до заряда $-Q$:

$$\frac{k2Q^2}{(l+x)^2} = \frac{kQ^2}{x^2}, \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{l}{\sqrt{2}-1} = l\left(\sqrt{2}+1\right)$$

где k - постоянная закона Кулона, x - расстояние от заряда $-Q$ до точки нулевой силы. Минимальной скорости на бесконечности, при которой движущийся заряд преодолеет рассматриваемую точку, отвечает его нулевая скорость в ней. Применяя к движению заряда от бесконечно удаленной точки до точки нулевой силы теорему об изменении кинетической энергии, получим

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = Q(\varphi_\infty - \varphi_x) \qquad (*)$$

где v_0 - скорость заряда на бесконечности, φ_∞ и φ_x - потенциал поля закрепленных зарядов в бесконечно удаленной точке и точке нулевой силы. Вычисляя потенциалы на основе принципа суперпозиции, получаем

$$\varphi_\infty = 0, \qquad \varphi_x = \frac{k2Q}{l+x} + \frac{k(-Q)}{x} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 kQ}{l} \qquad (**)$$

Теперь из (**) с использованием (*) находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 kQ^2}{ml}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – существование точки, проходя которую движущийся заряд обязательно достигнет заряда $-Q$ – 0,5 балла
2. Правильное нахождение этой точки – 0,5 балла

3. Правильное использование теоремы об изменении энергии, правильный подсчет потенциалов начальной и конечной точки – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

4. Из первого условия находим ускорение шайбы

$$\omega R = at \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\omega R}{t}$$

Во втором случае начальная скорость шайбы будет равна

$$v_0 = \sqrt{(\omega R)^2 + v^2}$$

поэтому время остановки находится из следующего соотношения

$$t_1 = \frac{\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{\omega R} t \,,$$

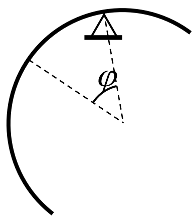
причем за торможение движения шайбы вдоль стержня отвечает проекция ускорения противоположная скорости v

$$a_{\square} = \frac{\omega R v}{t\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}} \,.$$

Поэтому путь, пройденный шайбой вдоль стержня, можно найти как

$$S = vt_1 - \frac{a_{\square} t_1^2}{2} = \frac{vt\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{2\omega R}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно найдено ускорение шайбы (из первого условия) – 0,5 балла
2. Правильно найдено время торможения во втором случае – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для движения шайбы вдоль стержня – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла



5. Основная идея решения задачи заключается в следующем. Поскольку полуокружность контактирует с опорой только в одной точке, ее центр тяжести будет расположен на одной вертикали с точкой касания. Поэтому на опору полуокружность будет опираться наклоненным к горизонту участком и начнет скользить по опоре, если $\mu \le \mathrm{tg}\,\alpha$, будет покоиться, если $\mu \ge \mathrm{tg}\,\alpha$. Поэтому для решения необходимо найти положение центра тяжести полуокружности, найти угол наклона участка, опирающегося на опору.

Для нахождения центра тяжести полуокружности мысленно разделим ее на малые участки длиной Δl_1, Δl_2, … воспользуемся формулой для нахождения координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{\Delta m_1 y_1 + \Delta m_2 y_2 + ...}{m} \qquad (*)$$

где y_c - y-координата центра тяжести (см. рисунок), Δm_1, Δm_2, … - массы участков Δl_1, Δl_2, …, y_i - их y-координаты, m - масса полуокружности (очевидно, x-координаты центра тяжести равны нулю). Поскольку y-координата участка Δl_i определяется как $y_i = R\cos\varphi_i$ (R - радиус полуокружности,

φ_i - угол между направлением на рассматриваемый участок и осью y, см. рисунок), то из формулы (*) имеем

$$y_c = \frac{\lambda R\left(\Delta l_1 \cos\varphi_1 + \Delta l_2 \cos\varphi_2 + ...\right)}{m}$$

где $\lambda = m/\pi R$ - линейная плотность полуокружности. Как следует из рисунка, произведения $\Delta l_i \cos\varphi_i$ имеют смысл проекции рассматриваемого участка на ось y. Поэтому сумма в скобках равна $2R$. Подставляя в эту формулу линейную плотность полуокружности, получим для координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{2}{\pi} R$$

Теперь рассмотрим условие равновесия полуокружности. Центр тяжести находится строго под опорой, угол наклона кусочка полуокружности к опоре равен углу между направлением к кусочку полуокружности от центра полуокружности и от ее центра тяжести (см. рисунок; этот угол обозначен буквой α). Используя теорему косинусов для треугольника OCA, получим

$$r = \sqrt{y_c^2 + R^2 - 2Ry_c \cos\varphi}$$

(обозначения понятны из рисунка). Теперь находим угол α. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{R - y_c \cos\varphi}{\sqrt{y_c^2 + R^2 - 2Ry_c \cos\varphi}}$$

Выражая теперь тангенс через косинус, получим

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{y_c^2 + R^2 - 2Ry_c \cos\varphi}{\left(R - y_c \cos\varphi\right)^2} - 1} = \frac{y_c \sin\varphi}{R - y_c \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\pi}{2} - \cos\varphi}$$

И, следовательно, для равновесия должно быть выполнено условие

$$\mu \geq \frac{\sin\varphi}{\frac{\pi}{2} - \cos\varphi}$$

Т.е. минимальный коэффициент трения, обеспечивающий равновесие, определяется соотношением

$$\mu_{\min} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\pi}{2} - \cos\varphi} \qquad (**)$$

Найдем теперь максимум минимального коэффициента трения как функции угла φ. Продифференцируем выражение (**) по φ и приравняем производную к нулю. Получим

$$\mu'_{\min} = \frac{\cos\varphi}{\frac{\pi}{2} - \cos\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{\left(\frac{\pi}{2} - \cos\varphi\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - 1}{\left(\frac{\pi}{2} - \cos\varphi\right)^2} = 0$$

Отсюда

$$\cos\varphi_{\max} = \frac{2}{\pi},$$

а максимальное значение минимального коэффициента трения удерживающего полуокружность в равновесии равно

$$\left(\mu_{\min}\right)_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \approx 0,83 \qquad (***)$$

Этот ответ показывает, что если коэффициент трения больше значения (***), то при любом угле φ полуокружность будет находиться в равновесии.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильно найдено положение центра тяжести полукольца (без обоснования этот пункт не засчитывается) – 0,5 балла
2. Правильно найден минимальный коэффициент трения, при котором кольцо будет в равновесии при отклонении на угол φ – 0,5 балла
3. Правильно найден максимум минимального коэффициента трения как функции φ – 0,5 балла
4. Правильный ответ максимального значения минимального коэффициента трения – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

Правильные ответы без решения не засчитываются!