Решения задач и критерии оценки работ участников

Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике, 2020-2021 учебный год,

11 класс

1. В цилиндрический сосуд радиуса R налито синтетическое масло, в котором плавает кусочек «водяного» льда, не касаясь дна и стенок. Объем кусочка V. Изменится ли уровень масла в сосуде, когда кусочек льда растает, и если да, то на сколько? Известно, что плотность воды $\rho_в$ больше плотности масла $\rho_м$. Плотность льда $\rho_л$.

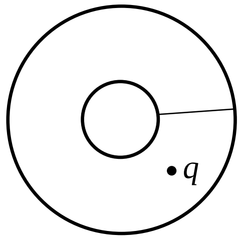
2. Ускорение свободного падения на некоторой планете зависит от высоты x от поверхности по закону

$$g(x)=\begin{cases} g_0-\alpha x, & 0<x<g_0/\alpha \\ 0, & g_0/\alpha<x \end{cases},$$

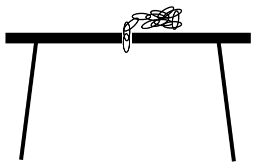
где g_0 и α - положительные постоянные. Найти вторую космическую скорость для данной планеты.

3. С одним молем гелия происходит процесс, в котором объем газа зависит от его абсолютной температуры по закону $V=V_0+\alpha T$, где V_0 и α - положительные постоянные. Объем газа меняется от величины V_0 до величины $2V_0$. Найти максимальную и минимальную теплоемкость газа в этом процессе.

4. Имеются две проводящие незаряженные концентрические (с общим центром) сферы радиуса R и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от общего центра сфер помещают точечный заряд q, а сферы соединяют тонким проводником (см. рисунок). Какой заряд протечет по этому проводнику с меньшей сферы на бóльшую в процессе установления равновесия?



5. В центре горизонтального гладкого стола, расположенного на высоте h от пола сделано отверстие. Около отверстия лежит свернутая в бухту цепочка с мелкими звеньями длиной $l=h$. Один конец цепочки тихонько сталкивают в отверстие, и цепочка начинает падать. Через какое время цепочка коснется пола? Ответ обосновать.



Решения

1. При данных соотношениях плотностей лед плавает на поверхности масла, а вода тонет. Найдем соотношения объемов вытесненной воды в первом и втором случаях.

Условие равновесия плавающего льда дает

$$\rho_л g V = \rho_м g V_{п.ч.}$$

где $V_{п.ч.}$ - объем погруженной в масло части льдинки, который совпадает с объемом вытесненной масла. Отсюда получаем

$$V_{п.ч.} = \frac{\rho_л V}{\rho_м}$$

Рассмотрим теперь случай, когда льдинка растаяла. В этом случае образовавшаяся при таянии вода утонет и вытеснит ровно такой объем масла, каков ее собственный объем. Этот объем $V_в$ найдем из условия, что масса воды равна массе растаявшего льда

$$\rho_л V = \rho_в V_в$$

Поэтому

$$V_в = \frac{\rho_л V}{\rho_в}$$

Таким образом, ответ на вопрос о том, понизится или повысится уровень масла в сосуде при таянии льдинки «водяного» льда сводится к сравнению двух объемов

$$V_{п.ч.} = \frac{\rho_л V}{\rho_м} \quad \vee \quad V_в = \frac{\rho_л V}{\rho_в} \qquad (*)$$

Если $V_{п.ч.} > V_в$, льдинка вытесняет больший объем масла, чем вода, и при таянии льдинки уровень масла в сосуде понизится. Если $V_{п.ч.} < V_в$, льдинка вытесняет меньший объем масла, чем вода, и уровень масла в сосуде понизится. Если $V_{п.ч.} = V_в$, уровень масла не изменится. Поскольку по условию $\rho_м < \rho_в$, то из формулы (*) заключаем, что $V_{п.ч.} > V_в$, и, следовательно, уровень масла в сосуде понизится. Величину понижения можно найти из условия, что излишек вытесненного в первом случае масла по сравнению со вторым распределится по всему сосуду. Поэтому уровень масла опустится на величину

$$\Delta h = \frac{V_{п.ч.} - V_в}{\pi R^2} = \frac{\rho_л \left(\rho_в - \rho_м\right) V}{\pi \rho_в \rho_м R^2}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – сравнение вытесненных объемов масла в первом и втором случаях - 0,5 балла
2. Правильный объем вытесненного масла в первом случая – 0,5 балла
3. Понято, что вода утонет, и правильно найден объем вытесненного масла во втором случае – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

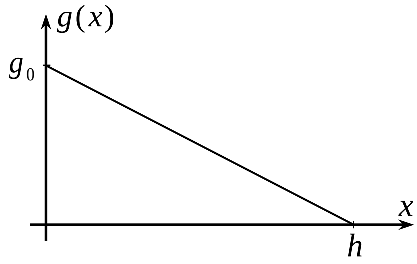
2. Вторая космическая скорость – это минимальная скорость, имея которую на поверхности планеты, тело может покинуть область притяжения планеты. Поскольку область притяжения планеты простирается до высоты $h = g_0 / \alpha$ (выше этой высоты ускорение свободного падения становится равным нулю), то минимальная скорость, при которой тело сможет улететь от планеты, - это такая скорость на поверхности, при которой скорость тела на высоте h станет равной нулю. Применяя к телу теорему об изменении кинетической энергии, получим для второй космической скорости v_0

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A$$

где A - работа, совершенная над телом силой тяжести при его движении от поверхности до высоты h. Поскольку сила тяжести изменяется, для вычисления работы мысленно разобьем траекторию тела от поверхности до высоты h над поверхностью на малые участки Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, вычислим работу силы тяжести на каждом, просуммируем эти работы. Получим

$$A = \left(-mg(x_1)\Delta x_1 - mg(x_2)\Delta x_2 - mg(x_3)\Delta x_3 + ...\right) = -m\left(g(x_1)\Delta x_1 + g(x_2)\Delta x_2 + g(x_3)\Delta x_3 + ...\right)$$

где $g(x_1)$, $g(x_2)$, … - ускорение свободного падения на каждом участке. Сумма в скобках имеет смысл площади под графиком зависимости ускорения свободного от высоты и вычисляется графически (аналогичную сумму приходится вычислять при вычислении работы силы упругости). Строя этот график, и находя площадь под ним, получим



$$A = -\frac{mg_0^2}{2\alpha}$$

Отсюда находим

$$v_0 = \frac{g_0}{\sqrt{\alpha}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная связь второй космической скорости с работой силы тяжести – 0,5 балла
2. Правильная идея и обоснование нахождения работы через график зависимости силы от расстояния – 0,5 балла
3. Правильно найдена работа силы тяжести – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

3. Найдем теплоемкость гелия как функцию его объема в рассматриваемом процессе. Для этого сообщим газу малое количество теплоты δQ, найдем приращение его температуры ΔT и теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} \qquad (*)$$

По первому закону термодинамики имеем

$$\delta Q = \delta A + \Delta U$$

где δA - работа газа в этом процессе, ΔU - изменение его внутренней энергии. Для процесса, в котором газу сообщили малое количество теплоты, его давление p меняется очень мало, и, следовательно, работа газа определяется соотношением $\delta A = p\Delta V$. Поскольку гелий – одноатомный газ, изменение внутренней энергии гелия определяется соотношением $\Delta U = (3/2)R\Delta T$ (согласно условию мы рассматриваем один моль газа, поэтому $\nu = 1$ моль). Поэтому

$$\delta Q = p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T \qquad (**)$$

С другой стороны, приращение объема газа для процесса, в котором $V = V_0 + \alpha T$, равно $\Delta V = \alpha\Delta T$, а давление можно найти из закона Клапейрона-Менделеева

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{R\left(V - V_0\right)}{\alpha V}.$$

Поэтому из формул (*)-(**) имеем для теплоемкости гелия

$$C = \frac{3}{2}R + \frac{R\left(V - V_0\right)}{V} = \frac{5}{2}R - \frac{RV_0}{V}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом процессе теплоемкость газа является монотонно растущей функцией объема. И, следовательно, минимальное значение теплоемкости достигается при $V = V_0$, максимальное – при $V = 2V_0$. А сами эти значения равны

$$C_{\min} = \frac{3}{2}R, \qquad C_{\max} = \frac{5}{2}R - \frac{1}{2}R = 2R$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное определение теплоемкости газа в определенном состоянии – 0,5 балла
2. Правильное использование первого закона термодинамики, правильное выражение для работы газа в элементарном процессе – 0,5 балла
3. Правильное нахождение работы газа через данную зависимость объема от температуры и закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

4. Найдем сначала потенциалы сфер до их соединения проводником. Поскольку электрическое поле внутри меньшей сферы отсутствует, потенциал меньшей сферы равен потенциалу в ее центре. Мысленно разобьем малую и большую сферы на точечные заряды Δq_i и ΔQ_i и воспользуемся формулой для потенциала поля точечного заряда. Согласно принципу суперпозиции потенциал в центре создается независимо друг от друга всеми имеющимися зарядами. Поэтому потенциал в центре сфер равен

$$\varphi_R = \frac{kq}{2R} + \sum_i \frac{k\Delta q_i}{R} + \sum_i \frac{k\Delta Q_i}{3R} = \frac{kq}{2R} + \frac{k}{R}\sum_i \Delta q_i + \frac{k}{3R}\sum_i \Delta Q_i \qquad (*)$$

где первое слагаемое – потенциал в центре сфер, создаваемый точечным зарядом q, второе слагаемое – потенциал в центре, создаваемый зарядами малой сферы, третье слагаемое – потенциал в центре сфер, создаваемый зарядами на большой сфере. Но суммарный заряд сфер равен нулю, поэтому

$$\varphi_R = \frac{kq}{2R}$$

Потенциал большой сферы можно найти из следующих соображений. В поле заряда q собственные заряды большой сферы перераспределятся, заряды расположатся на внутренней и внешней поверхностях этой сферы так, что поле между ними (внутри металла, из которого сделана большая сфера) будет равно нулю. Поэтому суммарный заряд на внутренней поверхности большой сферы равен $-q$, на внешней q, причем заряды на внешней поверхности будут распределены равномерно. Поэтому потенциал большой сферы равен потенциалу точечного заряда q, расположенного в центре сфер. Поэтому

$$\varphi_{3R} = \frac{kq}{3R}$$

После соединения сфер проводником их потенциалы должны выровняться. Но потенциал большей сферы при этом не может измениться, поскольку он определяется зарядами ее внешней поверхности, которые равны суммарному заряду внутри - q. А значит, и потенциал меньшей сферы должен стать таким же. Поэтому если с меньшей сферы на бóльшую перетечет заряд x, из формулы (*), получаем

$$\varphi_R' = \frac{kq}{2R} + \frac{k}{R}\sum_i \Delta q_i + \frac{k}{3R}\sum_i \Delta Q_i = \frac{kq}{2R} - \frac{kx}{R} + \frac{kx}{3R} = \frac{kq}{3R}$$

Из последнего равенства находим $x = q/4$. Таким образом, с меньшей сферы на большую перетечет заряд того же знака, что и заряд q величиной

$$x = \frac{q}{4}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея нахождения потенциалов большей и меньшей сфер – 0,5 балла
2. Правильное условие равновесие зарядов при замыкании сфер проводником – равенство их потенциалов – 0,5 балла
3. Правильный подсчет потенциалов большей и меньшей сфер после их соединения – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

5. Пока часть цепочки лежит на столе, ее ускорение не будет равно ускорению свободного падения, поскольку движущимся частям приходится вовлекать в движение покоящиеся звенья, а для этого нужна сила. И, следовательно, со стороны лежащих звеньев на падающие действует такая же сила, что приводит к тому, что ускорение цепочки не равно ускорению свободного падения.

Пусть скорость цепочки в некоторый момент времени равна v. Тогда за время Δt начнет двигаться кусочек длиной $v\Delta t$. Изменение его импульса составит $\Delta p = \Delta m v = \lambda v^2 \Delta t$ (λ - масса единицы длины цепочки). Для этого нужна сила

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lambda v^2,$$

действующая со стороны падающих звеньев на покоящиеся. Точно такая же сила (по третьему закону Ньютона) действует со стороны покоящихся звеньев на падающие. Поэтому второй закон Ньютона для падающей части цепочки дает

$$\lambda x a = \lambda x g - \lambda v^2$$

где x - длина свисающего конца. Отсюда находим

$$a = g - \frac{v^2}{x} \qquad (*)$$

Итак, ускорение цепочки и координата ее конца связаны соотношением (*). С другой стороны, для равноускоренного движения без начальной скорости справедливо соотношение

$$v^2 = 2aS$$

где v - скорость тела в некоторый момент, a - его ускорение, S - пройденный путь. Из формулы (*) получаем

$$v^2 = 2\frac{(g-a)}{2}x$$

Поэтому движение цепочки – равноускоренное, с ускорением, для которого справедливо уравнение

$$a = \frac{(g-a)}{2}$$

Из этого уравнения находим

$$a = \frac{g}{3}$$

Используя далее закон равноускоренного движения для конца цепочки, получаем

$$x(t) = \frac{(g/3)t^2}{2}$$

Откуда

$$t = \sqrt{\frac{6h}{g}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – нахождение силы натяжения цепочки в процессе ее падения – 0,5 балла
2. Правильный второй закон Ньютона для падающей части цепочки – 0,5 балла
3. Правильное обоснование равноускоренности движения цепочки – 0,5 балла
4. Правильное ускорение конца цепочки, правильный ответ для времени – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

Правильные ответы без решения не засчитываются!