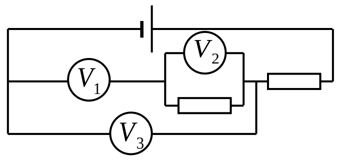
Решения и критерии оценки работ участников

Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике, 2020-2021 учебный год,

11 класс

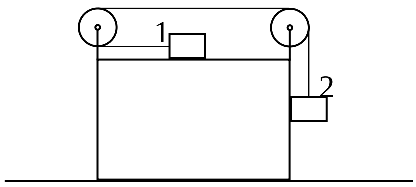
1. В двух одинаковых сосудах содержится одноатомный идеальный газ. Температуры газов в сосудах одинаковы, а давления отличаются в два раза. Газам сообщают одинаковые количества теплоты, и газ в одном сосуде нагревается до абсолютной температуры T, в другом – до абсолютной температуры $4T/3$. Найти начальную температуру газов. Изменением объема сосудов при нагревании пренебречь.

2. Электрическая цепь (см. рисунок), содержит идеальный источник, три одинаковых вольтметра и два одинаковых резистора. Известно, что показания вольтметра V_1 отличаются от показаний вольтметра V_2 в три раза, а вольтметр V_3 показывает напряжение $V_3 = 10$ В. Чему равно напряжение источника?

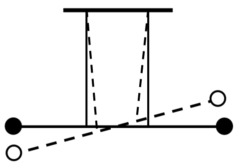


3. Ракета движется с работающим двигателем так, что массовый расход топлива постоянен, а скорость выброшенных газов относительно ракеты равна v_0. При какой скорости ракеты ее кинетическая энергия максимальна?

4. Имеется два тела одинаковой массы m и куб вдвое большей массы. Тела связывают нитью, которую пропускают через систему блоков, установленных на кубе. Найти ускорение тела 2. Трения нет ни на каких поверхностях, нить невесома и нерастяжима. Массой блоков можно пренебречь. «Геометрия» системы такова, что при вертикальном расположении участка нити, прикрепленного к телу 2, оно касается боковой грани куба, а нить, прикрепленная к телу 1 горизонтальна.



5. Стержень длиной l, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких тела массой m, подвешен на двух вертикальных нитях длиной h. Расстояние между нитями $2l/3$, нити прикреплены симметрично относительно центра тяжести стержня, стержень горизонтален. Стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси и отпускают. Найти частоту малых колебаний стержня.



Решения

1. Пусть начальная температура газов равна T_0. Из закона Клапейрона-Менделеева для газов в сосудах

$$pV = \nu_1 R T_0 \text{ и } \frac{p}{2}V = \nu_2 R T_0$$

где p и $p/2$ - давления газов в сосудах, V - объем сосудов (по условию он одинаковый), ν_1 и ν_2 - количество вещества газов в сосудах, заключаем, что количество вещества газа во втором сосуде вдвое меньше количества вещества газа в первом

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{2}.$$

Далее, процесс происходящий с газами – изохорический, поэтому газы не совершают работу. Применяя к газам первый закон термодинамики, получим

$$Q = \frac{3}{2}\nu_1 R\left(T - T_0\right) \text{ и } Q = \frac{3}{2}\frac{\nu_1}{2}R\left(\frac{4}{3}T - T_0\right)$$

Приравнивая правые части этих соотношений, получим уравнение, в которое входит единственная неизвестная величина – начальная температура газов

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}T - T_0\right)$$

Отсюда находим

$$T_0 = \frac{2}{3}T$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное применение закона Клапейрона-Менделеева для начальных состояний, правильное соотношение количеств вещества – 0,5 балла
2. Правильное применение первого закона термодинамики – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для начальной температуры газов – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

2. Пусть сопротивление вольтметра R. Найдем сопротивление резистора r. Вольтметр показывает напряжение на самом себе. Поэтому из закона Ома для участка цепи и одинаковости вольтметров (они все имеют одинаковые сопротивления) следует, что сила тока, текущего через один из двух вольтметров V_1 или V_2 втрое меньше, чем через другой. А поскольку ток, текущий через вольтметр V_1 делится на участке параллельного соединения вольтметра V_2 и резистора, то меньшим является показание вольтметра V_2, а ток, текущий через резистор, параллельный вольтметру V_2 вдвое больше тока, текущего через V_2. Следовательно, сопротивление вольтметра вдвое больше сопротивления резистора

$$R = 2r$$

Поэтому сопротивление участка цепи, содержащего вольтметр V_1 и параллельно соединенные резистор и вольтметр V_2, равно

$$2r+\frac{r\cdot 2r}{(r+2r)}=\frac{8}{3}r$$

Поэтому если через вольтметр V_3 течет ток I_1, то через участок, содержащий вольтметр V_1 и параллельно соединенные резистор и вольтметр V_2, течет ток

$$I=\frac{3}{4}I_1$$

Следовательно, через одиночный резистор течет ток

$$I_2=\frac{3}{4}I_1+I_1=\frac{7}{4}I_1$$

а напряжение на этом резисторе равно

$$U=\frac{7}{4}I_1 r=\frac{7}{8}IR$$

Но IR - это напряжение на вольтметре V_3. Поэтому $IR=10$ В, а напряжение источника равно

$$U_{ист}=V_3+\frac{7}{8}V_3=\frac{15}{8}V_3=18{,}75\ \text{В}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно понято, кто больше – показания вольтметра 1 или вольтметра 2. Правильное соотношение сопротивлений резистора и вольтметра – 0,5 балла
2. Правильно найдено общее сопротивление участка цепи, содержащего два вольтметра - 0,5 балла
3. Правильно найден ток через участок цепи, содержащий два вольтметра – 0,5 балла
4. Правильный ответ для напряжения (и формула, и число) – 0,5 балла

3. При выбросе из двигателя ракеты продуктов сгорания увеличивается ее скорость, но одновременно уменьшается ее масса. Исследуем кинетическую энергию на экстремум. Для этого найдем производную кинетической энергии ракеты по времени и приравняем производную к нулю. Имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{dm}{dt}\frac{v^2}{2}+mv\frac{dv}{dt}=-\frac{\mu v^2}{2}+mv\frac{dv}{dt}=0$$

где m и v - масса и скорость ракеты в рассматриваемый момент времени. С другой стороны, изменение скорости ракеты можно найти по закону сохранения импульса. Переходя в систему отсчета, связанную с ракетой имеем для изменения скорости ракеты за интервал времени Δt:

$$\mu dt v_0=mdv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=\frac{\mu v_0}{m}$$

Отсюда и предыдущего соотношения получаем

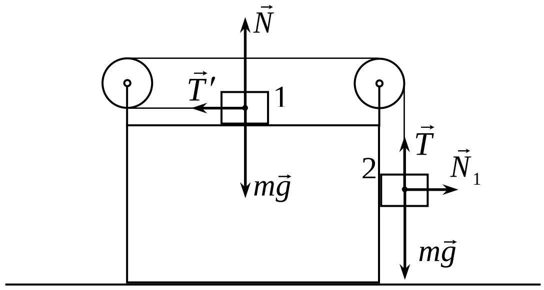
$$v=2v_0$$

Т.е. кинетическая энергия ракеты максимальна, когда ее скорость вдвое больше скорости продуктов сгорания относительно ракеты.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – нахождение максимума кинетической энергии ракеты через производную – 0,5 балла
2. Правильное использование закона сохранения импульса – 0,5 балла

3. Правильное уравнение для скорости, при которой кинетическая энергия ракеты максимальна – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла



4. Пусть массы тел равны m, масса куба nm. Так на систему тел в горизонтальном направлении не действуют никакие внешние силы, центр масс системы не может перемещаться по горизонтали. Поэтому когда тело 2 будет опускаться, тело 1 будет двигаться влево, а куб – вправо. Поэтому возникнет сила реакции, действующая со стороны вертикальной грани куба на тело 2. Поэтому на тела 1 и 2 действуют силы, показанные на рисунке. Второй закон Ньютона для первого и третьего тел в проекции на горизонтальную ось, и для второго тела в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дают

$$\begin{aligned} ma_1 &= T \\ ma_{2,в} &= mg - T \\ ma_{2,г} &= N_1 \\ nma_3 &= T - N_1 \end{aligned} \qquad (*)$$

Здесь T - сила натяжения нити, N_1 сила, действующая со стороны куба на тело 2, a_1 - величина ускорения первого тела, $a_{2,в}$ - вертикальная составляющая ускорения второго тела, $a_{2,г}$ - горизонтальная составляющая ускорения второго тела, a_3 - величина ускорения третьего тела (куба).

Установим теперь условия связи между ускорениями. Поскольку перемещения куба и тела 2 в горизонтальном направлении одинаковы, то

$$a_{2,г} = a_3$$

Если за какой-то малый интервал времени тело 1 переместилось влево на величину Δx_1, а куб переместился вправо на величину Δx_3 то длина нити от тела 1 до левого блока стала короче на величину

$$\Delta x_1 + \Delta x_3$$

А поскольку длина верхнего участка нити не изменилась, то ровно на такую величину опустится второе тело. Поэтому таким же образом связаны скорости и ускорения тел

$$a_1 + a_3 = a_{2,в}$$

В результате система уравнений (*)-(**) принимает вид

$$\begin{cases} ma_1 = T \\ ma_{2,в} = mg - T \\ ma_{2,г} = N_1 \\ nma_3 = T - N_1 \\ a_{2,г} = a_3 \\ a_1 + a_3 = a_{2,в} \end{cases} \qquad (**)$$

Система шести уравнений (**) содержит шесть неизвестных, и потому может быть решена. Решая эту систему относительно $a_{2,г}$ и $a_{2,в}$, получим

$$a_{2,г}=\frac{g}{2n+3},\qquad a_{2,в}=\frac{(n+2)g}{2n+3}$$

Следовательно, ускорение тела 2 равно

$$a_2=\frac{g\sqrt{n^2+4n+5}}{2n+3}$$

Для $n=2$ имеем

$$a_2=\frac{\sqrt{17}g}{7}$$

Направлен вектор ускорения пот углом

$$\alpha=\operatorname{arctg}(n+2)$$

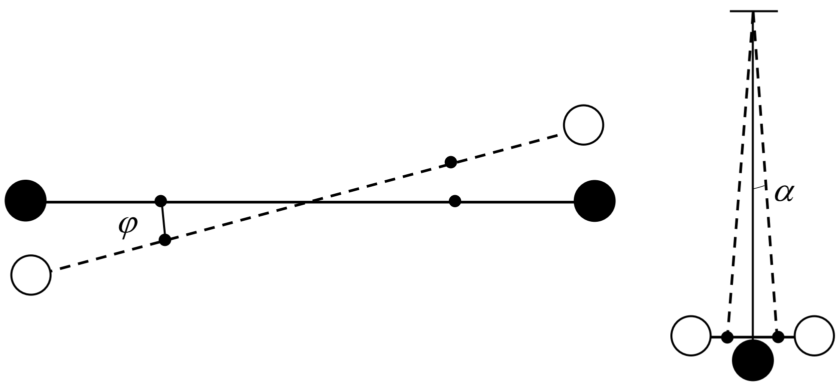
($\alpha=\operatorname{arctg}(4)$ - в первом и третьем варианте, $\alpha=\operatorname{arctg}(5)$ - во втором и четвертом) к горизонту.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильный второй закон Ньютона для тел – 0,5 балла
2. Правильные условия связи ускорений – 0,5 балла
3. Правильное ускорение тела 2 – 0,5 балла
4. Правильное направление ускорение тела 2 – 0,5 балла

5. Отклоним стержень с грузами на малый угол φ и найдем кинетическую и потенциальную энергию системы. Для малых углов они должны иметь вид

$$K=\frac{A\omega^2}{2};\qquad \Pi=\frac{B\varphi^2}{2}$$

где ω - угловая скорость вращения стержня, A и B - некоторые числа. При этом отношение B/A имеет смысл квадрата круговой частоты колебаний. Итак, повернем стержень на малый угол φ. Стержень при этом слегка поднимется вверх, поскольку нити, на которых он висит, отклонятся от вертикали (см. рисунок; левый рисунок - вид сверху, точками показаны места крепления нитей, правый рисунок – вид со стороны шариков).



Поскольку угол поворота стержня мал, точки крепления нитей сместятся по горизонтали относительно своих первоначальных положений на $\Delta x=\frac{l\varphi}{3}$. Поэтому для угла отклонения нитей от вертикали α имеем

$$h\alpha = \frac{l\varphi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{l}{3h}\varphi$$

Следовательно, при повороте стержень поднимется на величину Δh, которую можно найти как

$$\Delta h = h\left(1-\cos\alpha\right) = 2h\sin^2\left(\alpha/2\right) = \frac{h\alpha^2}{2} = \frac{l^2\varphi^2}{18h}$$

А потенциальная энергия шариков увеличится на величину

$$\Delta\Pi = 2mg\Delta h = \frac{mgl^2\varphi^2}{9h} \qquad (*)$$

Кинетическая энергия шариков будет определяться соотношением

$$K = \frac{2mv^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{4} \qquad (**)$$

Из соотношений (*)-(**) находим круговую частоту колебаний стержня

$$\omega^2 = \frac{2mgl^2}{9h} : \frac{ml^2}{2} = \frac{4g}{9h} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – использование закона сохранения энергии или второго закона Ньютона для колебаний – 0,5 балла
2. Правильно найдена потенциальная энергия тел при отклонении на малый угол, приближение малого угла отклонения (или момент сил) – 0,5 балла
3. Правильно найдена кинетическая энергия тел (или ускорение тел) – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

Правильные ответы без решения не засчитываются!