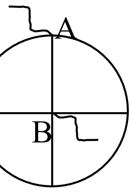
Решения и критерии оценивания решений
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом», 2020-2021 учебный год,
физика, 10 класс

Задания

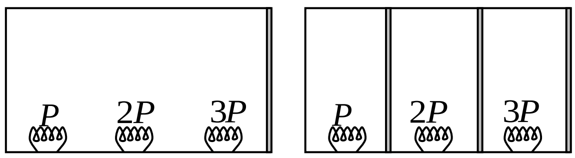
1. Под каким углом к горизонту было брошено тело, если его кинетическая энергия в момент броска и кинетическая энергия на половине максимальной высоты отличаются в 3/2 раза.

2. В очень высоком цилиндрическом сосуде находится вода. Высота уровня воды в сосуде - H. Когда в сосуд опустили деревянный брусок с плотностью ρ и высотой h, уровень воды поднялся на малую величину Δh. Какова будет высота уровня воды в стакане, когда в него друг на друга поставят столько таких же брусков, что нижний брусок коснется дна? Плотность воды ρ_0 ($\rho_0 > \rho$).

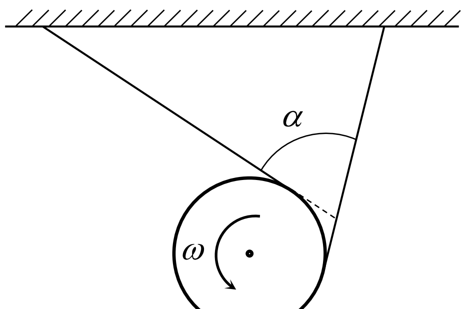
3. Из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно 2λ, изготовили кольцо радиуса R. Затем из другой проволоки, сопротивление единицы длины которой λ, изготовили две перекрещивающиеся под прямым углом диаметральными перемычки и прикрепили к кольцу. Найти сопротивление кольца между точками A и B.



4. Имеется цилиндрический сосуд, боковые стенки которого и левый торец теплоизолированы. Правый торец сосуда закрыт теплопроводящей перегородкой. В сосуде размещают три источника тепла мощностью P, $2P$ и $3P$, и при температуре наружного воздуха $t_0 = 10°$ C в сосуде устанавливается температура $t_1 = 25°$ C (левый рисунок). В сосуд устанавливают еще две точно таких же перегородки, отделяющие источники друг от друга (правый рисунок). Какие температуры установятся в образовавшихся секциях? Считать, что температура газа внутри сосуда и внутри каждой секции во втором случае одинаковы. Указание. Мощность теплопередачи между телами с разной температурой пропорциональна разности температур и площади теплового контакта тел (закон Фурье).



5. На массивный диск радиуса R намотаны две невесомые и нерастяжимые нити. Свободные концы нитей прикрепляют к горизонтальному потолку, а диск удерживают в некотором положении. Затем диск отпускают, и он начинает сматываться с нитей, которые при движении диска остаются постоянно натянутыми. Известно, что в некоторый момент времени угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями равен α. Найти величину и направление скорости центра диска в этот момент.



Решения

1. Пусть тело бросили с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Тогда его максимальная высота подъема равна

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Используя далее закон сохранения энергии для подъема на половину максимальной высоты и учитывая, что кинетическая энергия тела в этой точке в 3/2 раза меньше начальной, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{3} + mg\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g}$$

Из этого уравнения находим

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное выражение для максимальной высоты подъема – 0,5 балла
2. Правильное использование закона сохранения энергии – 0,5 балла
3. Правильное использование закона сохранения энергии для половины максимальной высоты подъема – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

2. Поскольку плотность дерева меньше плотности воды, брусок плавает в воде. При этом глубина его погружения x относительно уровня воды определяется условием плавания – сила тяжести бруска равна силе Архимеда F_A, действующей на брусок

$$mg = F_A \qquad \Rightarrow \qquad \rho g h S = \rho_0 g x S \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\rho}{\rho_0} h \qquad (*)$$

Здесь m - масса бруска, h - высота бруска, S - площадь его поперечного сечения. При этом величина x отсчитывается от нового положения уровня воды в сосуде. Подъем уровня определяется соотношением площадей бруска и сосуда, которые нам не заданы. Однако подъем уровня воды в сосуде нам задан, поэтому можно найти, насколько опустится нижняя грань бруска по отношению к первоначальному уровню воды без знания площадей. Действительно, поскольку по условию уровень воды поднимается на величину Δh, а брусок по отношению к этому уровню опущен на величину x (*), то по отношению к первоначальному уровню воды нижняя грань одного бруска окажется опущенной на величину

$$\delta_1 = \frac{\rho}{\rho_0} h - \Delta h$$

(Поскольку брусок должен опуститься по отношению к первоначальному уровню – ведь он должен вытеснить воду, чтобы уровень воды в сосуде поднялся, отсюда следует, что

$$\frac{\rho}{\rho_0} h > \Delta h \text{)}$$

Когда мы ставим друг на друга n одинаковых брусков с одинаковым сечением, то это эквивалентно опусканию в сосуд бруска высотой nh с тем же сечением. Но при фиксированных площадях сечения подъем уровня воды пропорционален высоте бруска, поэтому уровень воды поднимется на величину $n\Delta h$. Поэтому нижняя грань стопки из n одинаковых брусков опустится по отношению к первоначальному уровню на величину

$$\delta_n = n\left(\frac{\rho}{\rho_0}h - \Delta h\right)$$

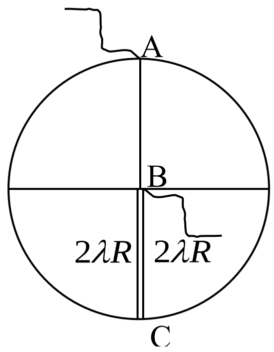
И, следовательно, стопка брусков коснется дна сосуда, если

$$\delta_n > H \qquad \Rightarrow \qquad n > \frac{H}{\dfrac{\rho}{\rho_0}h - \Delta h} = \frac{H\rho_0}{\rho h - \Delta h \rho_0}$$

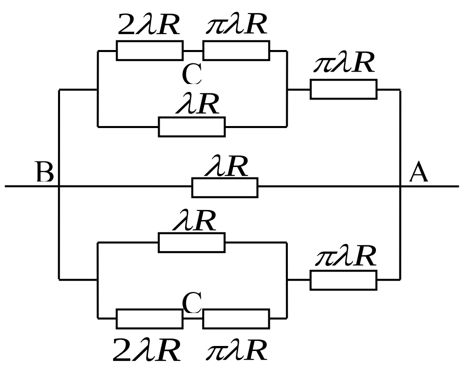
Поэтому высота уровня воды в сосуде будет равна

$$H_1 = H + n\Delta h = H\left(1 + \frac{\Delta h \rho_0}{\rho h - \rho_0 \Delta h}\right),$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование закона Архимеда – 0,5 балла
2. Правильное вычисление глубины погружения тела с учетом подъема уровня воды в сосуде – 0,5 балла
3. Правильное обобщение этих формул на случай произвольного числа одинаковых тел – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла



3. Поскольку сопротивление каждой перемычки от центра до окружности равно λR, то данную в условии электрическую цепь можно представить в виде, показанном на рисунке 1. Т.е. представить проводник, идущий от центра окружности (т. B) к самой окружности в направлении, противоположном точке A (в точку C), как два параллельных проводника с удвоенным сопротивлением (по сравнению с тем проводником, который был на этом месте). Действительно, сопротивление проводника, состоящего из двух параллельно соединенных одинаковых проводников, будет вдвое меньше сопротивления каждого из них. При этом благодаря симметрии цепи, по проводнику, соединяющему два проводника с сопротивлением $2\lambda R$ в точке C, электрический ток течь не будет. Поэтому его можно удалить из цепи без изменения ее электрического сопротивления и представить электрическую схему цепи так, как это показано на рисунке 2 (сопротивления всех резисторов указаны на этом рисунке). Эта цепь сводится к последовательному или параллельному соединению резисторов. Поэтому ее сопротивление ищется элементарно по правилам сложения сопротивлений. В результате получим для сопротивления цепи



$$R_{об} = \frac{\left(2 + 4\pi + \pi^2\right)\lambda R}{8 + 6\pi + \pi^2}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – разделение проводника BC на два (с правильными сопротивлениями) и их разрыв в точке C – 0,5 балла
2. Правильные формулы для нахождения общего сопротивления последовательно и параллельно соединенных резисторов – 0,5 балла

3. Правильная эквивалентная схема – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

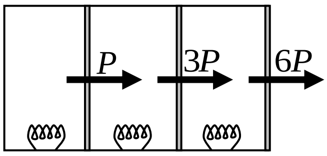
4. В первом случае в установившемся режиме мощность теплопотерь через перегородку равно $6P$. С другой стороны, по закону Фурье эта мощность пропорциональна разности температур между газом внутри сосуда и окружающим воздухом

$$6P = k\left(t_1 - t_0\right)$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств перегородки и ее площади. Отсюда находим

$$k = \frac{6P}{\left(t_1 - t_0\right)} \qquad (*)$$

Когда сосуд разделен перегородками на три отсека, потоки тепла через перегородки в установившемся режиме будут равны P, $3P$ и $6P$ (см. рисунок). Поэтому по закону Фурье для правой перегородки найдем, что температура газа в правом отсеке равна той же величине, что и температура газа в сосуде, не разделенном перегородками



$$t_{пр} = t_1 = 25^\circ\ \text{C}$$

Применяя закон Фурье ко второй справа перегородке, получим

$$3P = k\left(t_{ср} - t_{пр}\right) = k\left(t_{ср} - t_1\right)$$

где $t_{ср}$ - температура газа в среднем отсеке (здесь учтено, что площадь второй перегородки и теплопроводящие свойства такие же, как у правой, поэтому в эту формулу входит тот же коэффициент пропорциональности, что и для правой перегородки). Подставляя в эту формулу коэффициент k (*), получим

$$t_{ср} = \frac{3t_1 - t_0}{2} = 32{,}5^\circ\ \text{C} \qquad (**)$$

Аналогично, применяя закон Фурье к левой перегородке, получим

$$P = k\left(t_{лев} - t_{ср}\right)$$

где $t_{ср}$ - температура газа в левом отсеке. Подставляя в эту формулу коэффициент k (*) и температуру в среднем отсеке, найдем

$$t_{лев} = \frac{5t_1 - 2t_0}{3} = 35^\circ\ \text{C}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – сумма потоков тепла через перегородки в равновесии равны мощности выделяемого тепла – 0,5 балла
2. Правильное использование закона Фурье, правильные уравнения теплового баланса – 0,5 балла
3. Правильное нахождение коэффициента пропорциональности в законе Фурье для перегородки – 0,5 балла
4. Правильный ответ для температур газа в отсеках – 0,5 балла

5. Пусть в некоторый момент времени диск занимал положение, показанное на рисунке. Найдем перемещение центра диска за малый интервал времени Δt. Поскольку диск вращается с угловой скоростью ω, а нити натянуты, то длина каждой нити стала больше на величину $\omega R\Delta t$. Поэтому переместятся точки контакта нитей с диском и соответственно центр диска. На рисунке 1 бледным цветом показано старое положение нитей и диска, ярким – их новые положения. Кроме того, на рисунке показаны (бледным цветом и ярким цветом соответственно) радиусы диска, проведенные в точку касания нитей и диска в начальный момент и спустя время Δt. Стрелкой OO' на этом рисунке показан вектор перемещения центра диска. Так как мы рассматриваем малый интервал времени Δt, то углы между старыми и новыми положениями нитей очень малы, и в треугольниках ABC и DEF углы B и C, а также E и F практически равны друг другу. Здесь A и D - точки крепления нитей к потолку, C и E - точки касания нитей и диска в первоначальном положении, B и F - точки пересечения радиусов диска, проведенных в точки касания нитей в первоначальном положении с новыми положениями нитей. Следовательно, в этих треугольниках AB=AC и DE=DF, а потому $BC'=FE'=\omega R\Delta t$ (буквами C' и E' обозначены точки касания нитей и диска в его новом положении).

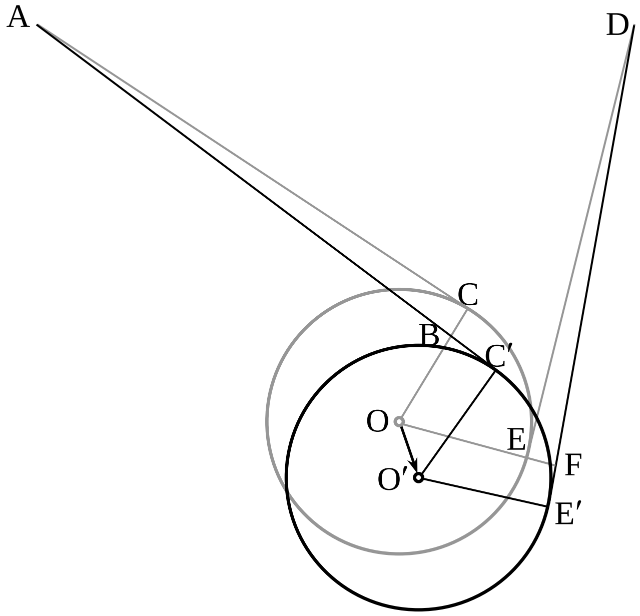


Рис. 1

Поэтому проекции вектора перемещения центра диска OO' на левую нить (AC или AC' - неважно, поскольку угол между старым и новым положением левой нити очень мал) и правую нить (неважно DE или DE') равны $\omega R\Delta t$. На рисунке 2 эти проекции показаны жирными отрезками $O'G$ и $O'H$ соответственно. Следовательно, прямоугольные треугольники OGO' и OHO' равны друг другу. Поэтому равны друг другу углы между вектором перемещения диска и нитями, что означает, что

$$\angle GO'O=\angle HO'O=\frac{\alpha}{2},$$

т.е. центр диска движется параллельно биссектрисе угла между нитями α, а длину вектора перемещения диска за

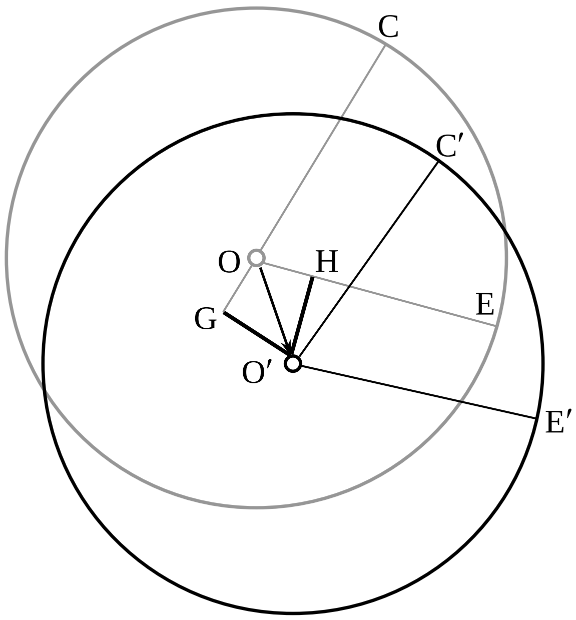


Рис. 2.

рассматриваемый интервал времени легко найти из прямоугольного треугольника OGO' (или OHO'). Находим

$$OO' = \frac{GO'}{\cos(\alpha/2)} = \frac{HO'}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\omega R \Delta t}{\cos(\alpha/2)}$$

Поэтому скорость центра диска в рассматриваемый момент определяется соотношением

$$v = \frac{OO'}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – рассмотрение малого перемещения центра диска за некоторый малый интервал времени – 0,5 балла
2. Правильное нахождение перемещений точек касания нитей и и диска – 0,5 балла
3. Правильный ответ для величины скорости центра диска – 0,5 балла
4. Правильный ответ для направления скорости центра диска – 0,5 балла

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.