

*Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», весна 2021, математика, 8 класс*

**Вариант № 1**

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. На полпути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 5 минут и, сохраняя прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 10 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида  $\frac{3n+2}{5n-7}$ ? При каких целых  $n$  это может произойти?

3. Половина мальчиков класса сидит за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но пятая часть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

4. Для каких простых чисел  $p$  и  $q$  квадратное уравнение  $x^2 + px + 3q = 0$  имеет целые корни?

5. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $N$  так, что  $BN : NC = 3 : 1$ . Найти отношение длин сторон треугольника  $AC$  и  $BC$ .

*Ответы и решения*

1. Пусть  $s$  – расстояние от дома до школы (в км),  $v$  – скорость автобуса (в км/ч).

Тогда, по условию, время в пути в понедельник (в часах):

$$T_1 = \frac{s}{2v} + \frac{1}{12} + \frac{s}{2v} = \frac{s}{v} + \frac{1}{12},$$

а время в пути во вторник (в часах):

$$T_2 = \frac{s}{2v} + \frac{1}{4} + \frac{s}{4v} = \frac{3s}{4v} + \frac{1}{4}.$$

Поскольку  $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{s}{v} + \frac{1}{12} = \frac{3s}{4v} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{v} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{s}{v} = \frac{2}{3}$ .

Но если переезд свободен, то поездка занимает как раз  $\frac{s}{v} = \frac{2}{3}$  часа, то есть 40 минут.

*Ответ:* 40 минут.

2. Найдем наибольший общий делитель (НОД) числителя и знаменателя. По свойству НОД:

$$\begin{aligned} \text{НОД}(5n - 7, 3n + 2) &= \text{НОД}(5n - 7 - (3n + 2), 3n + 2) = \\ &= \text{НОД}(2n - 9, 3n + 2) = \text{НОД}(2n - 9, n + 11) = \\ &= \text{НОД}(n - 20, n + 11) = \text{НОД}(31, n + 11). \end{aligned}$$

Поскольку 31 – простое число, получаем, что  $\text{НОД}(31, n + 11) = 1$  или  $\text{НОД}(31, n + 11) = 31$ . Первый случай не подходит, так как не приводит к сокращению дроби. Второй случай реализуется, только если  $n + 11$  делится на 31, то есть, для  $n = 31k - 11$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . При

этом дробь сокращается только на 31. Иных общих делителей у числителя и знаменателя быть не может, так как 31 – простое число.

*Ответ:* можно сократить на 31 при  $n = 31k - 11$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. Пусть  $m$  – количество мальчиков,  $d$  – число девочек в классе. Треть девочек не сидит с мальчиками. Значит, половина мальчиков сидят с остальными девочками, так что

$$\frac{m}{2} = \frac{2d}{3} \Rightarrow 3m = 4d \Rightarrow \begin{cases} m:4 \\ d:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4k \\ d = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Число списывающих девочек

$$n = \frac{3k}{5} \Rightarrow k:5 \Rightarrow k = 5p \Rightarrow \begin{cases} m = 20p, \\ d = 15p, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При этом количество списывающих девочек не должно превышать числа самостоятельных мальчиков. А количество списывающих мальчиков не должно превышать числа самостоятельных девочек. Всего в классе  $d + m = 35p$  учащихся. С учетом условия задачи,  $35p \leq 40 \Rightarrow p = 1$ . Тогда число девочек в классе  $d = 15$ . Количество мальчиков  $m = 20$ . Из них 10 человек сидят с девочками и списывают, 10 работают самостоятельно. Списывающих девочек  $n = 15 : 5 = 3 \leq 10$ . Самостоятельно работают  $15 - 3 = 12$  девочек, 10 из которых сидят с мальчиками. Все условия задачи выполнены.

*Ответ:* 12 девочек.

4. Пусть  $x_1, x_2$  – целые решения уравнения  $x^2 + px + 3q = 0$  с простыми  $p$  и  $q$ . Тогда, по теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -p < 0, \quad x_1 \cdot x_2 = 3q > 0.$$

Отсюда получаем, что оба корня должны быть отрицательные. Далее, поскольку корни целые, а числа  $q, 3$  – простые, то возможны только два варианта:

$$x_1 = -1, x_2 = -3q \quad \text{или} \quad x_1 = -3, x_2 = -q.$$

Рассмотрим первый случай. Если  $x_1 = -1, x_2 = -3q$ , то  $1 + 3q = p$ . Таким образом,  $p$  и  $q$  имеют разную четность. Единственное

простое четное число – это 2. Если  $p = 2$ , то уравнение  $1 + 3q = 2$  не имеет решения в простых числах, значит этот случай невозможен. Если же  $p$  – нечетно, то  $q$  – четно. Единственный возможный вариант  $q = 2$ . При этом  $p = 1 + 2 \cdot 3 = 7$  – простое число. Получили решение  $p = 7, q = 2$ . При этом  $x_1 = -1, x_2 = -6$ .

Рассмотрим второй случай. Если  $x_1 = -3, x_2 = -q$ , то  $3 + q = p$ . Снова  $p$  и  $q$  имеют разную четность. Если  $p = 2$ , то уравнение  $3 + q = 2$  не имеет решения в простых числах, значит этот случай невозможен. Если же  $p$  – нечетно, то  $q$  – четно. При  $q = 2$   $p = 3 + 2 = 5$  – простое число. Получили еще одно решение  $p = 5, q = 2$ . При этом  $x_1 = -3, x_2 = -2$ .

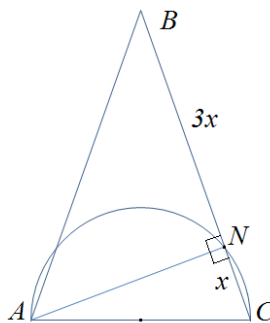
Мы рассмотрели все возможные случаи. Иных решений нет.

*Ответ:* имеется две пары решений:  $p = 5, q = 2$ ;  $p = 7, q = 2$ .

5. Пусть  $NC = x$ , тогда  $BN = 3x$ . Треугольник  $ABC$  – равнобедренный, поэтому  $AB = BC = 4x$ . Угол  $ANC$  – прямой, так как опирается на диаметр. Тогда угол  $ANB$  – тоже прямой, так как  $ANC$  и  $ANB$  – смежные.

В прямоугольном треугольнике  $ANB$ , по теореме Пифагора:

$$AN^2 = AB^2 - BN^2 = 16x^2 - 9x^2 = 7x^2.$$



В прямоугольном треугольнике  $ANC$ , по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AN^2 + NC^2} = \sqrt{7x^2 + x^2} = 2\sqrt{2}x.$$

Тогда 
$$\frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2}x}{4x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*Ответ:* 
$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## Вариант № 2

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав треть пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 4 минуты и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 6 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

*Ответ:* 18 минут.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида  $\frac{5n+3}{7n+8}$ ? При каких целых  $n$  это может произойти?

*Ответ:* можно сократить на 19 при  $n = 19k + 7$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. Треть мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только четверть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но треть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько мальчиков пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

*Ответ:* 18 мальчиков.

4. Для каких простых чисел  $p$  и  $q$  квадратное уравнение  $x^2 + 3px + 5q = 0$  имеет целые корни?

*Ответ:* задача не имеет простых решений.

5. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону  $BC$  в

точке  $N$  так, что  $BN : NC = 3 : 2$ . Найти отношение длин отрезков  $AN$  и  $AC$ .

*Ответ:*  $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

### Вариант № 3

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав четверть пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 6 минут и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 9 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

*Ответ:* 24 минуты.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида  $\frac{4n+3}{5n+2}$ ? При каких целых  $n$  это может произойти?

*Ответ:* можно сократить на 7 при  $n = 7k + 1, k \in \mathbb{Z}$ .

3. Три четверти мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только каждая третья девочка не хочет сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но половина девочек, не сидящих с мальчиками, списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с девочками за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

*Ответ:* 15 девочек.

4. Для каких простых чисел  $p$  и  $q$  квадратное уравнение  $x^2 + 5px + 7q = 0$  имеет целые корни?

*Ответ:* имеется две пары решений:  $p = 3, q = 2$ ;  $p = 2, q = 3$ .

5. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $N$  так, что  $BN : NC = 7 : 2$ . Найти отношение длин отрезков  $AN$  и  $BC$ .

*Ответ:*  $\frac{AN}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ .

#### Вариант № 4

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав три четверти пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 8 минут и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 4 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

*Ответ:* 32 минуты.

2. На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида  $\frac{3n+2}{8n+1}$ ? При каких целых  $n$  это может произойти?

*Ответ:* можно сократить на 13 при  $n = 13k - 5, k \in \mathbb{Z}$ .

3. Три четверти мальчиков класса сидят за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики – вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но половина

девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько мальчиков пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

*Ответ:* 4 мальчика.

4. Для каких простых чисел  $p$  и  $q$  квадратное уравнение  $x^2 + 7px + 3q = 0$  имеет целые корни?

*Ответ:*  $p = 2, q = 11$ .

5. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $N$  так, что  $BN : NC = 5 : 2$ . Найти отношение длин медиан  $NO$  и  $BO$  треугольников  $ANC$  и  $ABC$ .

*Ответ:*  $\frac{NO}{BO} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .