Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,2$. Известно, что за каждые 20 сек точка проходит путь 2м. Какой путь пройдет тело спустя 65 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -\sin\frac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{4x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $39\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 2$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 2

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A|\sin(\alpha t)|$, $t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,15$. Известно, что за каждые 30 сек точка проходит путь 6м. Какой путь пройдет тело спустя 50 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3x - \sqrt{3} = 0$.
Найти два других его корня.

3. При каких целых числах a и c выражение $\sqrt{ax^2 + 8x + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 12 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 12. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту четыре раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась большей 6?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 2 и $3\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $108\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 2$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 3$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 3

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|,\ t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,3$. Известно, что за каждые 15 сек точка проходит путь 5м. Какой путь пройдет тело спустя 95 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -tg\,\dfrac{2\pi}{9}$ является корнем кубического уравнения $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах a и b выражение $\sqrt{ax^2 + bx + 16}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 6 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 6. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 8?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 3 и $2\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $48\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 3$, а на стороне BC – точка P так, что $BP = 4$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Вариант № 4

1. Скорость движения тела на прямой изменяется по закону $v(t) = A\left|\sin(\alpha t)\right|,\ t \geq 0$ с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0,1$. Известно, что за каждые 40 сек точка проходит путь 4 м. Какой путь пройдет тело спустя 100 сек после начала движения?

2. Доказать, что число $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}tg\,\dfrac{5\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения $9x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$. Найти два других его корня.

3. При каких целых числах b и c выражение $\sqrt{16x^2 + bx + c}$ целое при любых целых x ?

4. В колоде 9 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 9. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту пять раз. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась меньшей 9?

5. Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 4 и $\sqrt{3}$. Пусть A – одна точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $412\sqrt{3}$?

6. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ=1$, а на стороне BC – точка P так, что $BP=5$. При этом $\measuredangle DAB = 2\measuredangle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $7-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. По условию задачи, пройденный за любые 20 секунд путь

$$\int_0^{t+20} v(s)ds - \int_0^t v(s)ds = 2 \to$$

Дифференцируя это равенство, получаем, что

$$v(t+20)-v(t)=0$$

т.е. функция $v(t)$ имеет 20 своим периодом. Но так как

$$v(t)=A\left|\sin(\alpha t)\right|$$

то ее наименьший положительный период равен π/α, следовательно

$$20=\frac{\pi}{\alpha}k \ \ (k\in N)$$

Отсюда находим

$$\alpha=\frac{\pi}{20}k$$

и так как $\alpha < 0{,}2$, то k=1. Таким образом

$$v(t)=A\left|\sin\left(\frac{\pi t}{20}\right)\right|$$

За первые 20 секунд пройденный также составил 2 м. Это дает возможность определить и постоянную A.

$$2=\int_0^{20} v(t)dt = A\int_0^{20}\left|\sin\left(\frac{\pi t}{20}\right)\right|dt = A\int_0^{20}\sin\left(\frac{\pi t}{20}\right)dt = -\frac{20A}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{20}\right)\Big|_0^{20} = \frac{40A}{\pi}$$

Из последнего равенства находим, что

$$A=\frac{\pi}{20}$$

Так как за каждые 20 секунд тело проходит 2 м, то за первые 60 секунд оно пройдет 6 м и за оставшиеся 5 секунд до конца расчетного времени оно пройдет еще

$$\int_{60}^{65}\frac{\pi}{20}\left|\sin\left(\frac{\pi t}{20}\right)\right|dt=-\int_{60}^{65}\frac{\pi}{20}\sin\left(\frac{\pi t}{20}\right)dt=\cos\left(\frac{\pi t}{20}\right)\Bigg|_{60}^{65}=-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

Искомый путь равен

$$6-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=7-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача 2 Ответ: $-\sin\frac{5\pi}{18}$, $\sin\frac{7\pi}{18}$

Решение. Рассмотрим уравнение

$$\sin 3\varphi=-\frac{1}{2}$$

Раскрывая синус тройного угла, приведем его к виду

$$3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=-\frac{1}{2}$$

$$8\sin^3\varphi-6\sin\varphi-1=0$$

т.е. для всех решений исходного уравнения величина

$$x=\sin\varphi$$

является решением кубического уравнения

$$8x^3-6x-1=0$$

Так как величина

$$\varphi=-\frac{\pi}{18}$$

удовлетворяет равенству

$$\sin 3\varphi=-\frac{1}{2}$$

то

$$x=-\sin\frac{\pi}{18}$$

является одним из решений уравнения

$$8x^3-6x-1=0$$

Остальные решения можно получить из исходного тригонометрического уравнения

$$\sin 3\varphi=-\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{aligned}&3\varphi=-\frac{\pi}{6}+2\pi k\\&3\varphi=\frac{7\pi}{6}+2\pi n\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\varphi=-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\\&\varphi=\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\end{aligned}\right.$$

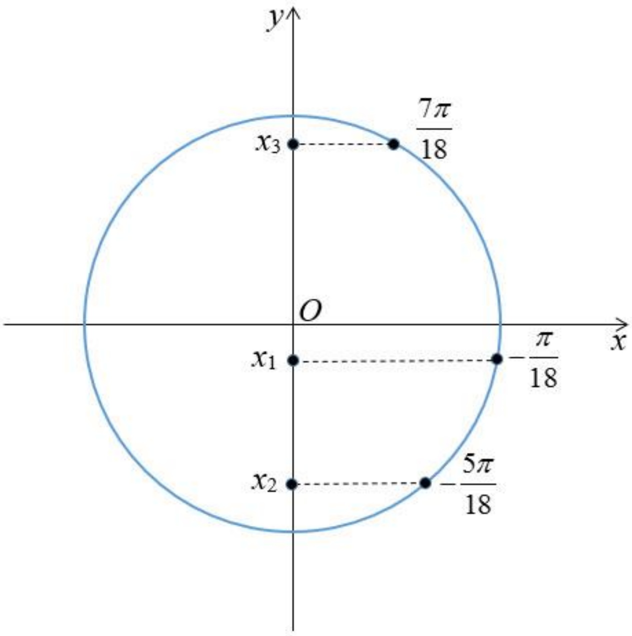
Среди этих решений нетрудно подобрать пару значений, для которых получаются другие значения для $x = \sin\varphi$. Помимо

$$x_1 = -\sin\frac{\pi}{18} \ \ (k = 0)$$

можно взять

$$x_2 = -\sin\frac{5\pi}{18} \ \ (n = -1)$$

$$x_3 = \sin\frac{7\pi}{18} \ \ (n = 0) \qquad -$$



Задача 3 Ответ: $b = 4k,\ c = k^2,\ k \in Z$

Решение. Используя формулу разности квадратов, получаем

$$\sqrt{4x^2 + bx + c} - 2x - \frac{b}{4} = \frac{4x^2 + bx + c - \left(2x - \frac{b}{4}\right)^2}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}} = \frac{c - \frac{b^2}{16}}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}}$$

$$4\sqrt{4x^2 + bx + c} - 8x - b = \frac{4c - \frac{b^2}{4}}{\sqrt{4x^2 + bx + c} + 2x + \frac{b}{4}}$$

В последнем равенстве слева при всех натуральных x стоит целое число, а правая часть при достаточно большом x будет по модулю меньше 1. Это может быть только если правая часть равна нулю, т.е.

$$c = \frac{b^2}{16}$$

С учетом полученного равенства перепишем исходное тождество в следующем виде

$$\sqrt{4x^2 + bx + c} - 2x = \frac{b}{4}$$

Слева при всех целых x стоит целое число, следовательно, правая часть также является целым числом, т.е.

$$b = 4k,\ k \in Z$$

Таким образом

$$b = 4k,\ c = \frac{b^2}{16} = k^2,\ k \in Z$$

Обратно, если выполнены последние соотношения, то

$$\sqrt{4x^2 + bx + c} = \sqrt{4x^2 + 4k + k^2} = \sqrt{(2x+k)^2} = |2x + k| \in Z$$

Задача 4 Ответ 0,006.

Решение. Всего имеем $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Число благоприятных вариантов равно 6

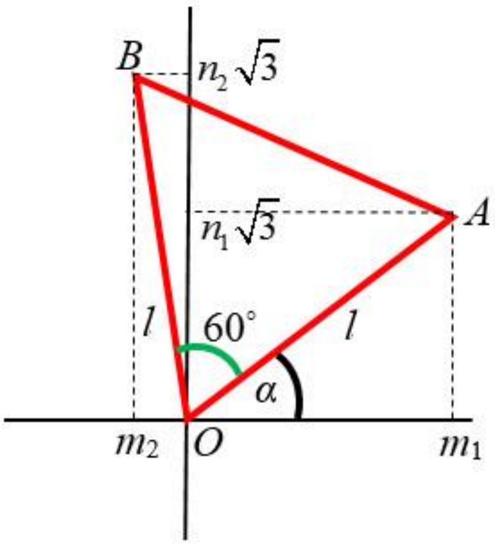
$$1+1+3$$
$$1+3+1$$
$$3+1+1$$
$$1+2+2$$
$$2+1+2$$
$$2+2+1$$

Искомая вероятность

$$p = \frac{6}{1000} = 0{,}006$$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $39\sqrt{3}$ равно 12.

Решение. Выберем любую вершину прямоугольников и поместим в ней начало O декартовой системы координат с осями, параллельными сети прямых. Без ограничения общности, можно поместить вершину равностороннего треугольника в точку O. Тогда координаты двух других вершин $A\left(m_1; n_1\sqrt{3}\right),\ B\left(m_2; n_2\sqrt{3}\right), m_1, m_2, n_1, n_2 \in Z$. Длины векторов $|OA| = |OB| = l$



Соотношения между координатами векторов OA и OB:

$$m_1 = l\cos\alpha,\ n_1\sqrt{3} = l\sin\alpha,$$

$$m_2 = l\cos\left(\alpha + 60^0\right) = l\left(\cos\alpha \cdot \frac{1}{2} - \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 - 3n_1\right),$$

$$n_2\sqrt{3} = l\sin\left(\alpha + 60^0\right) = l\left(\sin\alpha \cdot \frac{1}{2} + \cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(n_1\sqrt{3} + m_1\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + n_1\right)$$

Для описания всех равносторонних треугольников удобно взять за параметры

$$n_1 = s,\ m_2 = t$$

Тогда

$$m_1 = 2m_2 + 3n_1 = 2t + 3s$$

$$n_2 = \frac{1}{2}(m_1 + n_1) = \frac{1}{2}(2t + 3s + s) = t + 2s$$

И вершины A и B всех равносторонних треугольников задаются равенствами

$$A\left(2t + 3s; s\sqrt{3}\right),\ B\left(t; (t + 2s)\sqrt{3}\right)\ (s, t \in Z)$$

Длина стороны треугольников

$$l = OA = \sqrt{(2t + 3s)^2 + (s\sqrt{3})^2} = \sqrt{4t^2 + 12ts + 12s^2} = 2\sqrt{t^2 + 3ts + 3s^2}$$

Их площадь

$$S(t, s) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left((2t + 3s)^2 + 3s^2\right) = \sqrt{3}\left(t^2 + 3ts + 3s^2\right)$$

Покажем, что наименьшее значение $S(t,s)$ равно $\sqrt{3}$. Удобнее рассмотреть функцию

$$f(t, s) = t^2 + 3ts + 3s^2$$

и установить, что ее минимум равен 1. Рассмотрим эту функцию как квадратный трехчлен относительно переменной t. Абсцисса вершины параболы графика

$$t_в = -\frac{3s}{2}$$

и минимальное значение равно

$$f\left(-\frac{3s}{2}, s\right) = \frac{3}{4}s^2$$

Если $|s| \geq 2$, то $f \geq 3$. Остается рассмотреть случае s=1, s=−1, s=0. При s=1

$$f = t^2 + 3t + 3$$

Минимум этой функции достигается при t=−3/2 и в ближайших целочисленных точках t=−2 и t=−1 функция равна 1. Следовательно, для целочисленного аргумента минимум этой функции равен 1. Аналогично рассматривается случай s=−1. В этом случае

$$f = t^2 - 3t + 3$$

Минимум этой функции достигается при t=3/2 и в ближайших целочисленных точках t=1 и t=2 функция равна 1. Следовательно, для целочисленного аргумента минимум этой функции также равен 1. Остается последний случай s=0. Для этого варианта

$$f = t^2$$

Точка минимума здесь t=0.Так как точка (0,0) не участвует в рассмотрении, то брать ближайшие целочисленные точки ± 1, в которых функция равна 1. Наше утверждение доказано, поэтому минимально возможное значение площади равно $\sqrt{3}$.

Перейдем ко второму вопросу – сколько треугольников имеют площадь $39\sqrt{3}$. Для этого нужно ответить на вопрос о числе решений уравнения

$$S(t, s) = 39\sqrt{3}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{3}\left(t^2 + 3ts + 3s^2\right) = 39\sqrt{3}$$

$$t^2 + 3ts + 3s^2 = 39$$

Так как

$$t^2 = 39 - 3ts - 3s^2$$

то t кратно 3:

$$t = 3k \;\Rightarrow\; 9k^2 + 9ks + 3s^2 = 39$$

$$3k^2 + 3ks + s^2 = 13$$

Дискриминант квадратного трехчлена по переменной s должен быть неотрицательным для целых k :

$$D = 9k^2 - 4(3k^2 - 13) = 52 - 3k^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$$

Далее рассматриваем все возможные случаи

$$k = 0 \;\to\; s^2 = 13 \text{ (не подходит)}$$

$$k = 1 \;\to\; s^2 + 3s - 10 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = -5 \\ s = 2 \end{array}\right.$$

$$k = -1 \;\to\; s^2 - 3s - 10 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = -2 \\ s = 5 \end{array}\right.$$

$$k = 2 \;\to\; s^2 + 6s - 1 = 0 \text{ (не подходит)}$$

$$k = -2 \;\to\; s^2 - 6s - 1 = 0 \text{ (не подходит)}$$

$$k = 3 \;\to\; s^2 + 9s + 14 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = -2 \\ s = -7 \end{array}\right.$$

$$k = -3 \;\to\; s^2 - 9s + 14 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = 2 \\ s = 7 \end{array}\right.$$

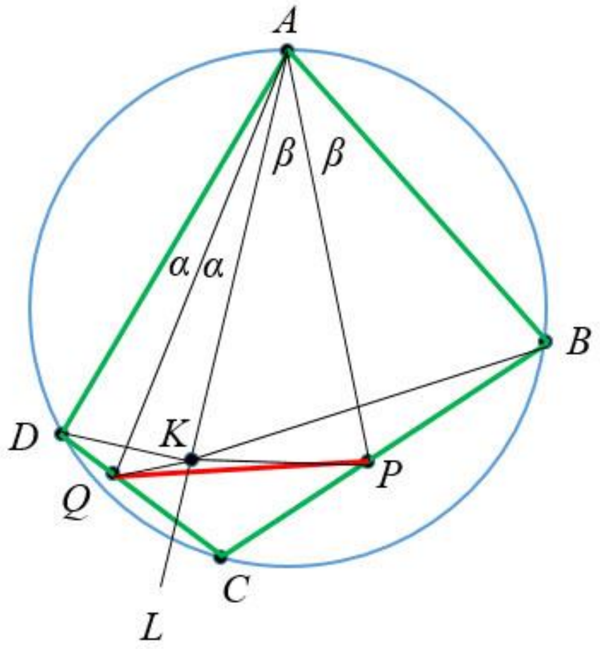
$$k = 4 \;\to\; s^2 + 12s + 35 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = -5 \\ s = -7 \end{array}\right.$$

$$k = -4 \;\to\; s^2 - 12s + 35 = 0 \;\to\; \left[\begin{array}{l} s = 5 \\ s = 7 \end{array}\right.$$

Всего 12 треугольников.

Задача 6 Ответ: 3.

Решение. Обозначим длины отрезков BP и DQ через a и b соответственно.



Пусть прямая AQ составляет угол α со стороной AD, а прямая AP – угол β со стороной AB. Проведем прямую AL, составляющую угол α с прямой AQ. Тогда по условию она составляет угол β с прямой AP. Отложим на прямой AL отрезок AK по длине равный AB. Точка K симметрична точкам D и B относительно прямых AQ и AP. Докажем, что точка K лежит на отрезке PQ.

Действительно,

$$\measuredangle PKA = \measuredangle CBA, \ \measuredangle QKA = \measuredangle CDA$$

Складывая равенства, получим

$$\measuredangle PKA + \measuredangle QKA = \measuredangle CBA + \measuredangle CDA = 180^0$$

как сумма противоположных углов описанного четырехугольника. Это означает, что угол

$$QKP = 180^0$$

и точка K лежит на отрезке PQ. Его длина равна сумме длин отрезков KP и KQ, т.е. $a+b$.

В данном варианте a=2, b=1, следовательно, PQ=3.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 10,5

Задача 2 Ответ: $2\cos\frac{13\pi}{18}, \ 2\cos\frac{11\pi}{18}$

Задача 3 Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=1, \ c=16 \\ a=4, \ c=4 \\ a=16, \ c=4 \end{array}\right.$

Задача 4 Ответ: $p = 1 - \frac{15}{12^4}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $36\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $108\sqrt{3}$ равно 6.

Задача 6 Ответ: 5.

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 31,25

Задача 2 Ответ: $\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}, \ \mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}$

Задача 3 Ответ: $a = k^2, \ b = 8k \ (k \in Z)$

Задача 4 Ответ: $p = \frac{5}{36}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $12\sqrt{3}$, число треугольников с площадью $48\sqrt{3}$ равно 6.

Задача 6 Ответ: 7.

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 10

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{\pi}{18}, \ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{7\pi}{18}$

Задача 3 Ответ: $b = 8k, \ c = k^2 \ \ (k \in Z)$

Задача 4 Ответ: $p = \frac{56}{9^5}$

Задача 5 Ответ: минимально возможная площадь равна $16\sqrt{3}$, треугольников с площадью $412\sqrt{3}$ нет.

Задача 6 Ответ: 6.