Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=3?» Петя ответил «49». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=49?» был получен ответ «122455». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})(\cos 2x+\sqrt{1+\cos^2 2x})=1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F=\dfrac{(5n-18)НОД(n+9,n+2)}{НОК(n+9,n+2)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3-6x=a^3+\dfrac{8}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a. При каких a уравнение имеет два различных решения? Найти эти решения.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 45^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 2

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос:«Чему равно значение многочлена при x=2?» Петя ответил «20». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x=20$?» был получен ответ «160004». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x+\sqrt{1+\sin^2 3x}=\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F=\dfrac{(7n-38)НОД(n+6,n+1)}{НОК(n+6,n+1)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 5 единиц?

5. Доказать, что уравнение $x^3+3x=a^3-\dfrac{1}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a. Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 60^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 3

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при x=4?» Петя ответил «78». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 78$?» был получен ответ «474714». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициентымногочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 2x})(\sin 3x + \sqrt{1+\sin^2 3x}) = 1$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \dfrac{(9n-167)НОД(n+12, n+1)}{НОК(n+12, n+1)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 4 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 - 9x = a^3 + \dfrac{27}{a^3}$ не может иметь трех действительных решений ни при каких a. При каких a уравнение имеет единственное решение? Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 30^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Вариант № 4

1. Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону никогда не сможет определить всекоэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 1$?» Петя ответил «4». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 4$?» был получен ответ «97». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2. Решить уравнение $\sin 3x + \sqrt{1+\sin^2 3x} = \sqrt{1+\sin^2 2x} - \sin 2x$.

3. Найти наибольшее значение выражения $F = \dfrac{(11n-53)НОД(n+5, n+2)}{НОК(n+5, n+2)}$ на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

4. Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 3 единицы?

5. Доказать, что уравнение $x^3 + 12x = a^3 - \dfrac{64}{a^3}$ имеет только одно действительное решение при любых допустимых a. Найти это решение.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 75^0. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре – на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

Решение. Пусть искомый многочлен имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Так как все коэффициенты многочлена – неотрицательные целые числа, то при $n \geq 4$

$$P(3) \geq a_n 3^n \geq 3^4 = 81 > 49$$

и первое условие задачи не может быть выполнено. Следовательно

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Далее, если старший коэффициент больше 1, то

$$P(49) \geq 2 \cdot 49^3 = 235298 > 122455$$

и не выполнено второе условие задачи. Таким образом, либо $a_3=0$, либо $a_3=1$. Покажем, что первый вариант не подходит. Действительно, в этом случае

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

и мы имеем два условия

$$\begin{cases} 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 49 \\ 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 122455 \end{cases}$$

Из первого уравнения теперь получаем оценки

$$9a_2 \leq 49 \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq 5$$

$$3a_1 \leq 49 \quad \Rightarrow \quad a_1 \leq 16$$

$$a_0 \leq 49$$

Но тогда

$$2401a_2 + 49a_1 + a_0 \leq 2401 \cdot 5 + 49 \cdot 16 + 49 = 12838 < 122455$$

и не выполнено второе условие. Таким образом, мы доказали, что наш многочлен может иметь только следующий вид

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

и мы получаем следующие условия задачи

$$\begin{cases} 27 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 49 \\ 117649 + 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 122455 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 22 \\ 2401a_2 + 49a_1 + a_0 = 4806 \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что

$$9a_2 \leq 22 \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq 2$$

и далее проверяем три возможных значения. При $a_2=0$ имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 22 \\ 49a_1 + a_0 = 4806 \end{cases}$$

Решая ее, находим $a_1=104$, $a_0=-290$. Этот случай нам не подходит. При $a_2=1$ имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 13 \\ 49a_1 + a_0 = 2405 \end{cases}$$

Решая ее, находим a_1=52, a_0=−143. Этот случай нам также не подходит. При a_2=2 имеем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + a_0 = 4 \\ 49a_1 + a_0 = 4 \end{cases}$$

Эта система имеет решение a_1=0, a_0=4. Это единственный приемлемый вариант и в этом случае

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4$$

Проверка

$$P(3) = 27 + 18 + 4 = 49$$

$$P(49) = 117649 + 4802 + 4 = 122455$$

Показывает, что условия задачи выполнены.

Задача 2 Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$

Решение. Так как

$$\left(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 2x}\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 2x} - \cos 2x\right) = 1$$

то величина

$$\sqrt{1+\cos^2 2x} - \cos 2x \neq 0$$

и умножая на нее исходное уравнение, получим равносильное

$$\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{1+\cos^2 2x} - \cos 2x \qquad (1)$$

Перенося вторые слагаемые в правой и левой частях уравнения в другую сторону, получаем равносильное уравнение

$$\sin x + \cos 2x = \sqrt{1+\cos^2 2x} - \sqrt{1+\sin^2 x}$$

После возведения в квадрат имеем

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x + \cos^2 2x =$$

$$= 1 + \sin^2 x - 2\sqrt{(1+\cos^2 2x)(1+\sin^2 x)} + 1 + \cos^2 2x$$

$$1 - \sin x \cos 2x = \sqrt{(1+\cos^2 2x)(1+\sin^2 x)}$$

Снова возводя в квадрат, получаем

$$1 - 2\sin x \cos 2x + \sin^2 x \cos^2 2x =$$

$$= 1 + \sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 x \cos^2 2x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x + \cos^2 2x = 0$$

$$(\sin x + \cos 2x)^2 = 0$$

$$\sin x + \cos 2x = 0 \qquad (2)$$

Обратно, подставляя в исходное уравнение

$$\cos 2x = -\sin x$$

и используя формулу разности квадратов, получим

$$\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)\left(\cos 2x+\sqrt{1+\cos^2 2x}\right)=$$
$$=\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)\left(-\sin x+\sqrt{1+\sin^2 2x}\right)=1$$

Это означает, что уравнения (1) и (2) равносильны. Решая уравнение (2), получаем

$$\sin x+\cos 2x=0,\quad \sin x+1-2\sin^2 x=0,\quad 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z\\ x=--\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z\end{array}\right.$$

Эти три серии можно записать одной

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 7 и достигается при n=12.
Решение. Известно, что НОД(a,b)НОК(a,b)=ab, поэтому заменяя в $F(n)$

$$НОК(n+9,n+2)=\frac{(n+9,n+2)}{НОД(n+9,n+2)}$$

получим, что

$$F(n)=\frac{(5n-18)НОД^2(n+9,n+2)}{(n+9)(n+2)}$$

Если d – общий делитель n+9 и n+2, то разность (n+9) – (n+2)=7 также делится на d. Следовательно, единственные общие делители n+9 и n+2 это только 1 или 7. Поэтому при каждом n рассматриваемая функция

$$F(n)=\frac{(5n-18)}{(n+9)(n+2)}$$

или

$$F(n)=\frac{49(5n-18)}{(n+9)(n+2)}$$

Рассмотрим на полуоси $x\geq 1$ вспомогательную функцию вещественной переменной

$$f(x)=\frac{(5x-18)}{(x+9)(x+2)}$$

и найдем ее наибольшее значение. Дифференцируя, имеем

$$f'(x)=\frac{5(x^2+11x+18)-(5x-18)(2x+11)}{(x+9)^2(x+2)^2}=$$

$$-\frac{5x^2-36x+288}{(x+9)^2(x+2)^2}=-\frac{(x-12)(5x+24)}{(x+9)^2(x+2)^2}$$

Эта производная при $x\geq 1$ меняет свой знак только один раз в точке x=12, причем с плюса на минус. Отсюда следует, что функция $F(x)$ в точке x=12 достигает своего наибольшего значения. Это значение равно

$$f(12)=\frac{(5\cdot 12-18)}{(12+9)(12+2)}=\frac{1}{7}$$

При n=12 оба числа n+9=21 и n+2=14 делятся на 7, следовательно

$$F(12) = 49f(12) = 7$$

а во всех остальных точках

$$F(n) \le \frac{49(5n-18)}{(n+9)(n+2)} = 49f(n) \le 7$$

Это доказывает, что $F(n)$ достигает своего наибольшего значения, равного 7, при n=12.

Задача 4 Ответ 0,083

Решение. Зафиксируем один из номеров. Рассмотрим различные варианты в зависимости от суммы k последних двух цифр номера. Число номеров, у которых она заключена от 0 до 9 равно k+1 (0 k, 1 k−1, 2 k−2, 3 k−3, …, k 0), а число номеров, у которых она больше 9, равна 19− k (9 k−9. 8 k−8, 7 k−7, …, k−9 9).Число номеров, у которых сумма k+6 заключена до 9 равно (k+6)+1=k+7, но 0≤k≤3. Число номеров, у которых сумма k+6 больше 9 также равна 19−(k+6)=13−k, но 4≤k≤12. Общее количество номеров равно

$$1\cdot 7+2\cdot 8+3\cdot 9+4\cdot 10+5\cdot 9+6\cdot 8+7\cdot 7+$$

$$+8\cdot 6+9\cdot 5+10\cdot 4+9\cdot 3+8\cdot 2+7\cdot 1=415$$

Для второго записанного номера столько же вариантов. Таким образом, благоприятных случаев 830. Всего возможных вариантов 100 для одного номера и 100 для другого, всего 100х100=10000.

Искомая вероятность

$$p = \frac{830}{10000} = 0,083$$

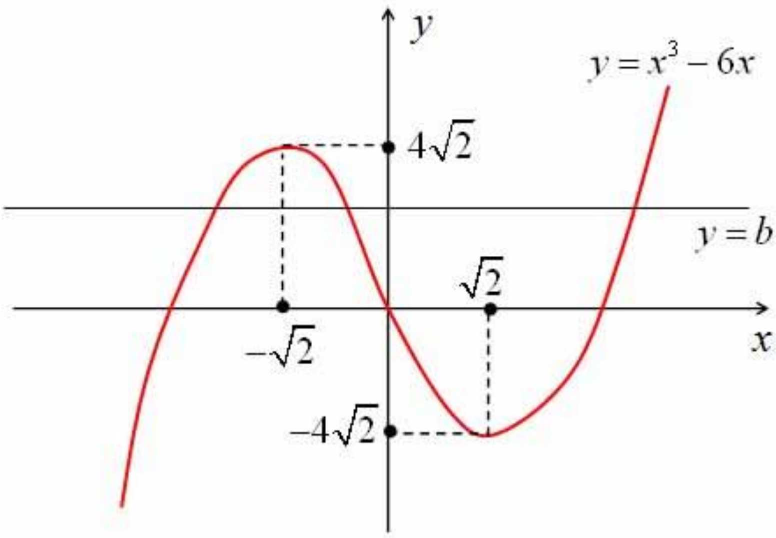
Задача 5 Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=-\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_1=\sqrt{2}, x_2=-2\sqrt{2} \\ a=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_1=-\sqrt{2}, x_2=2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Решение. Построим график левой части $y=x^3$-6x. Производная

$$y' = 3x^2-6 = 3(x^2-2) = 3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

Знаки производной

В точке $x=-\sqrt{2}$ функция имеет максимум, равный $4\sqrt{2}$, а в точке $x=\sqrt{2}$ минимум, равный $-4\sqrt{2}$.



Из этого следует, что уравнение

$$x^3 - 6x = b$$

имеет три решения тогда и только тогда, когда

$$-4\sqrt{2} < b < 4\sqrt{2}$$

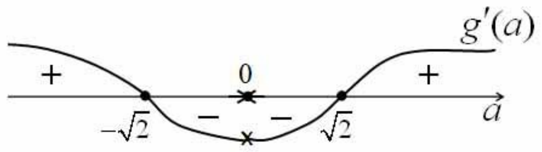
Найдем область значений функции

$$g(a) = a^3 + \frac{8}{a^3}$$

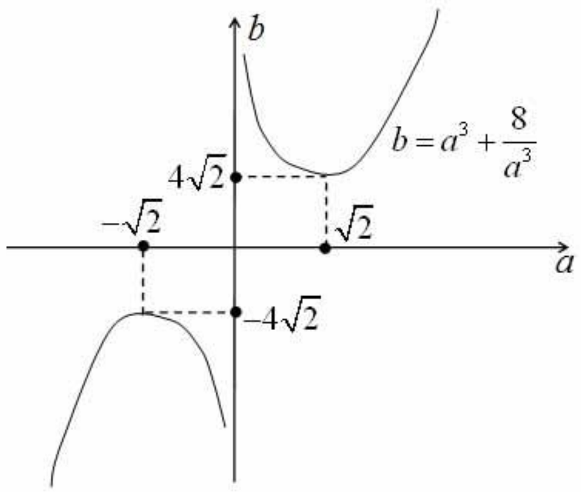
Производная

$$g'(a) = 3a^2 - \frac{24}{a^4} = \frac{3(a^6 - 8)}{a^4}$$

Знаки производной



В точке $a = -\sqrt{2}$ функция имеет максимум, равный $-4\sqrt{2}$, а в точке $a = \sqrt{2}$ минимум, равный $4\sqrt{2}$.



Отсюда следует, что область значений этой функции не содержит интервал

$$-4\sqrt{2} < b < 4\sqrt{2}$$

и рассматриваемое уравнение не может иметь трех различных корней. Два корня мы можем получить только в двух случаях

$$b = -4\sqrt{2} \quad (a = -\sqrt{2}), \ b = 4\sqrt{2} \quad (a = \sqrt{2}).$$

Для первого значения один из корней известен ($x = \sqrt{2}$), а второй находим, решая уравнение

$$x^3 - 6x = -4\sqrt{2}, \quad x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 4) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -2\sqrt{2}$$

Для второго значения один из корней также известен ($x = -\sqrt{2}$), а второй находим, решая уравнение

$$x^3 - 6x = 4\sqrt{2}, \quad x^3 - 6x - 4\sqrt{2} = 0$$

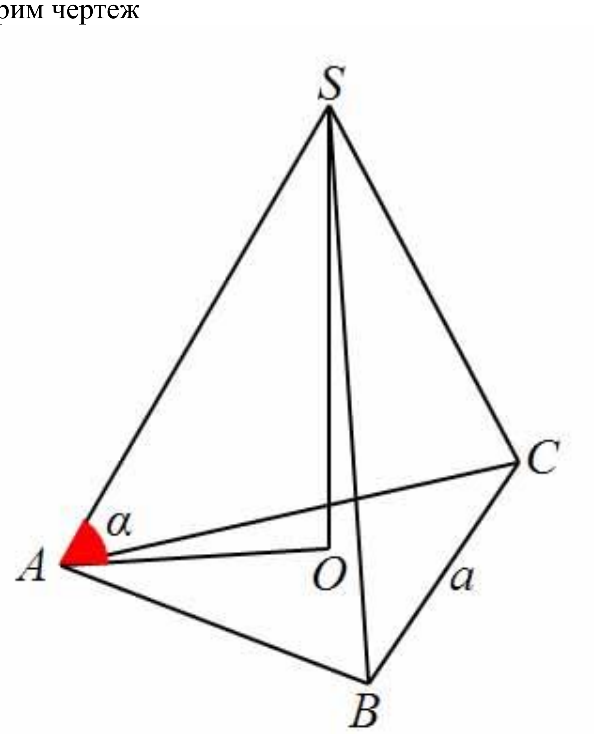
$$(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x - 4) = 0$$

$$(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{36\sqrt{3}}{(5+\sqrt{3})^3}$

Решение. Рассмотрим чертеж



Пусть a – сторона основания, α – угол наклона бокового ребра, H – высота пирамиды, R=AO − радиус окружности, описанной около основания. В правильном треугольнике сл стороной a радиус описанной окружности

$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Из прямоугольного треугольника SAO находим высоту пирамиды

$$H = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$$

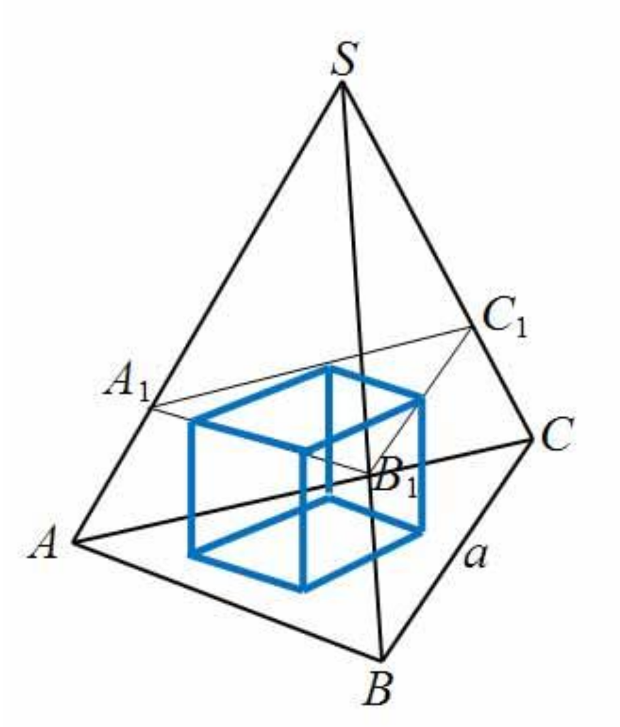
Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Объем пирамиды

$$V_n = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{12}$$

Пусть b –ребро вписанного куба и $A_1B_1C_1$ – сечение пирамида плоскостью верхней грани куба.



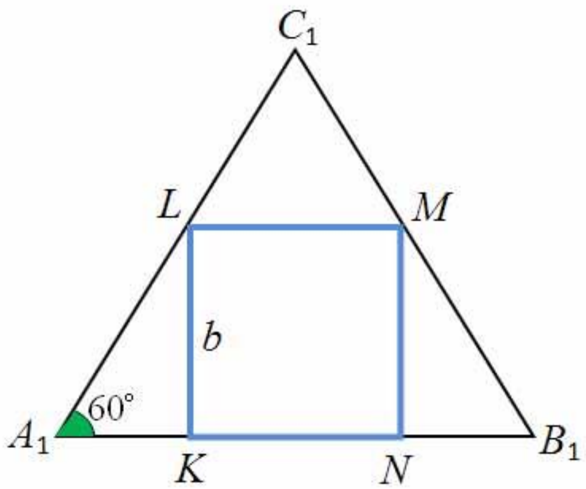
Обозначим через a_1 сторону треугольника этого сечения $a_1 = A_1B_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия

$$k = \frac{H-b}{H} = \frac{\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}} - b}{\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}} = \frac{a\operatorname{tg}\alpha - b\sqrt{3}}{a\operatorname{tg}\alpha}$$

и поэтому

$$a_1 = ka = \frac{a\operatorname{tg}\alpha - b\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ со вписанной гранью куба



Сторона

$$a_1 = A_1K + KN + NB_1 = \frac{b}{\operatorname{tg}60^\circ} + b + \frac{b}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}} + b + \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b$$

Приравнивая два выражения для a_1, находим b

$$\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha - b\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b$$

$$a - \frac{b\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b, \quad a = \frac{b\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b, \quad a = \frac{(2+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}b$$

$$b = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(2+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3}a$$

Так как объем куба $V_к = b^3$, то искомое отношение объемов

$$\frac{V_к}{V_п} = \left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(2+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3}a\right)^3 : \left(\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{12}\right) = \frac{36\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\left((2+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3\right)^3}$$

В нашем варианте угол α=45°, tg45°=1 и поэтому

$$\frac{V_к}{V_п} = \frac{36\sqrt{3}}{\left(5+\sqrt{3}\right)^3}$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^4 + 4$

Задача 2 Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 5 и достигается при n=14.

Задача 4 Ответ: 0,096

Задача 5 Ответ: $x = a - \dfrac{1}{a}$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{9}{2(1+\sqrt{3})^3}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x + 6$

Задача 2 Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5},\ k \in Z \end{array}\right.$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 11 и достигается при n=43.

Задача 4 Ответ: 0,108

Задача 5 Ответ: $x = a + \dfrac{3}{a} \quad (a \neq \pm\sqrt{3})$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{27}{2(1+2\sqrt{3})^3}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

Задача 2 Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \dfrac{2\pi k}{5},\ k \in Z \end{array}\right.$

Задача 3 Ответ: Максимальное значение равно 3 и достигается при n=13.

Задача 4 Ответ: 0,1184

Задача 5 Ответ: $x = a - \dfrac{4}{a}\quad (a \neq 0)$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{9(12+7\sqrt{3})}{2(5+2\sqrt{3})^3}$