Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin nx\cdot\cos\frac{7x}{n^2}$ имеет период $T=9\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы трех взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases}(x-4\cos\alpha)^2+(y-4\sin\alpha)^2=1\\(x-5\cos 2\alpha)^2+(y-5\sin 2\alpha)^2=9\end{cases}$ имеет единственное решение?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM:AB=1:3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 2

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x=-2$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 2 и 9 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos nx\cdot\cos\frac{6x}{n^2}$ имеет период $T=12\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы четырех взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в пять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 20 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases}(x-5\cos\alpha)^2+(y-5\sin\alpha)^2=1\\(x-6\cos 2\alpha)^2+(y-6\sin 2\alpha)^2=16\end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 4$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 3

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -1$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 3 и 10 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{15x}{n^2}$ имеет период $T = 5\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы пяти взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в семь раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число фруктовых конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 30 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases} (x-6\cos\alpha)^2 + (y-6\sin\alpha)^2 = 4 \\ (x-7\cos 2\alpha)^2 + (y-7\sin 2\alpha)^2 = 16 \end{cases}$ не имеет решений?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 2 : 3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Вариант № 4

1. Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -4$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n – его степень?». Получив ответы 4 и 17 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin nx \cdot \sin \frac{21x}{n^2}$ имеет период $T = 7\pi$?

3. Представить число 2021 в виде суммы шести взаимно простых чисел.

4. На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в девять раз меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 25 детей получили свои конфеты до того, как дед Мороз съел сам последнюю конфету?

5. При каких α система уравнений $\begin{cases} (x-7\cos\alpha)^2 + (y-7\sin\alpha)^2 = 9 \\ (x-8\cos 2\alpha)^2 + (y-8\sin 2\alpha)^2 = 25 \end{cases}$ имеет решения?

6. Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 2$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: n=2

Решение. Так как

$$x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2)(x_1^{k-1} + x_1^{k-2}x_2 + \ldots + x_1x_2^{k-2} + x_2^{k-1}),$$

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

тогда

$$P(x_1) - P(x_2) = a_n(x_1^n - x_2^n) + a_{n-1}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) + \ldots + a_1(x_1 - x_2)$$

и поэтому при целых x_1, x_2 разность $P(x_1) - P(x_2)$ делится на $x_1 - x_2$.

По теореме Безу $P(n)$=6, кроме того по условию задачи $P(-3)$=1, следовательно, величина

$$P(n) - P(-3) = 6 - 1 = 5$$

делится на n+3. Так как 5 – простое число, то n+3 равно 1 или 5. Ввиду того, что число n натуральное у нас только один вариант: n+3=5 и n=2.

Задача 2 Ответ: $\pm 1,\ \pm 3$

Решение. Условие задачи равносильно тому, что при всех вещественных x

$$\sin n(x + 9\pi)\cos\frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx\cos\frac{7x}{n^2}$$

1) n четно, в этом случае имеем равенство

$$\sin nx\cos\frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx\cos\frac{7x}{n^2}$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{7x}{n^2} - \cos\frac{7x + 63\pi}{n^2}\right) = 0$$

$$2\sin nx\sin\left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2}\right)\sin\frac{63\pi}{2n^2} = 0$$

Найдем нули первых двух синусов

$$\sin nx = 0 \iff nx = \pi k\ (k \in Z) \iff \frac{x}{\pi} = k\ (k \in Z)$$

$$\sin\left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2}\right) = 0 \iff \frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} = \pi m\ (m \in Z) \iff \frac{x}{\pi} = \frac{2n^2m - 63}{14}\ (m \in Z)$$

В обоих случаях отношение x к π рационально. Поэтому найдется такое значение x, при котором два первых синуса не обращаются в ноль (например, $x=\pi^2$). Отсюда следует, что условие задачи равносильно равенству

$$\sin\frac{63\pi}{2n^2} = 0 \iff \frac{63\pi}{2n^2} = \pi k\ (k \in Z) \iff 63 = 2n^2k\ (k \in Z)$$

которое не может быть выполнено так как число 63 нечетно.

2) n нечетно, в этом случае имеем равенство

$$-\sin nx\cos\frac{7(x + 9\pi)}{n^2} = \sin nx\cos\frac{7x}{n^2}$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{7x}{n^2} + \cos\frac{7x + 63\pi}{n^2}\right) = 0$$

$$\sin nx\cos\left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2}\right)\cos\frac{63\pi}{2n^2} = 0$$

Найдем нули первых двух множителей

$$\sin nx = 0 \iff nx = \pi k \ (k \in Z) \iff \frac{x}{\pi} = k \ (k \in Z)$$

$$\cos\left(\frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2}\right) = 0 \iff \frac{7x}{n^2} + \frac{63\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \ (m \in Z) \iff$$

$$\iff \frac{x}{\pi} = \frac{(2m+1)n^2 - 63}{14} \ (m \in Z)$$

В обоих случаях отношение x к π рационально. Поэтому и в этом случае найдется такое значение x, при котором два первых множителя не обращаются в ноль, а условие задачи равносильно равенству

$$\cos\frac{63\pi}{2n^2} = 0 \iff \frac{63\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in Z) \iff$$

$$\iff \frac{63}{n^2} = 2k + 1 \ (k \in Z)$$

Так как $63/n^2$ – целое, то

$$n \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

Задача 3 Ответ: Например, 2021=499+509+1013.

Решение. По свойству НОД

$$НОД(499,509) = НОД(499,509-499) = НОД(499,10)$$

$$НОД(499,1013) = НОД(499,1013-499) =$$

$$= НОД(499,514) = НОД(499,514-499) = НОД(499,15)$$

$$НОД(509,1013) = НОД(509,1013-509) =$$

$$= НОД(509,504) = НОД(509-504,504) = НОД(5,504)$$

Так как 499 не делится ни на 2, ни на 5, то НОД(499,509)=1. Так как 499 не делится ни на 3, ни на 5, то НОД(499,1013)=1. Так как 504 не делится на 5, то НОД(509,504)=1. Таким образом, все три слагаемых в сумме взаимно просты.

Задача 4 Ответ не меньше 11.

Решение. Пусть в мешке оставалось x шоколадных конфет и y фруктовых.

Найдем условие, когда вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Вероятность получить две шоколадные конфеты

$$p_ш = \frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)}$$

Вероятность получить шоколадную и фруктовую конфеты

$$p_ф = \frac{2xy}{(x+y)(x+y-1)}$$

Рассматриваемое условие равносильно равенству

$$\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{2xy}{3(x+y)(x+y-1)}$$

$$3(x-1) = 2y$$

$$y = \frac{3x-3}{2}$$

Для того, чтобы y было целым необходимо и достаточно, чтобы x было нечетным.

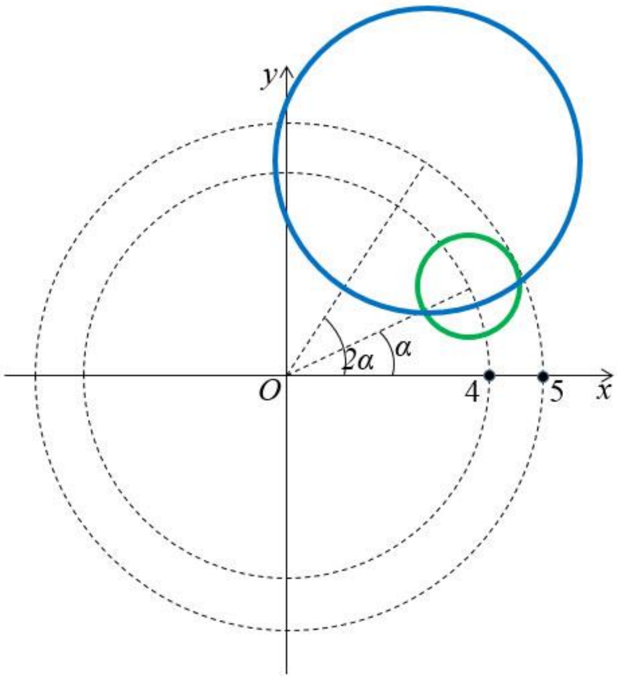
Найдем минимально возможное количество шоколадных конфет. С учетом Пети конфеты должно получить не менее 11 детей, т.е.

$$x+y\ge 22 \;\Leftrightarrow\; x+\frac{3x-3}{2}\ge 22 \;\Leftrightarrow\; 5x\ge 47$$

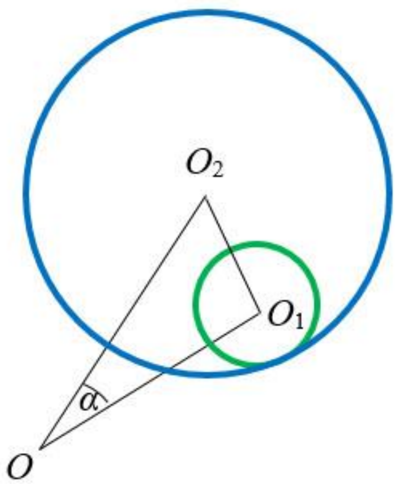
С учетом нечетности x это равносильно тому, что $x\ge 11$.

Задача 5 Ответ: $\left[\begin{array}{l}\alpha=\pm\arccos\dfrac{37}{40}+2\pi k,\; k\in Z\\ \alpha=\pm\arccos\dfrac{5}{8}+2\pi n,\; n\in Z\end{array}\right.$

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром, лежащим на окружности $x^2+y^2=16$ и полярным углом α. Второе уравнение задает окружность радиуса 3 с центром, лежащим на окружности $x^2+y^2=25$ и полярным углом 2α.



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти окружности касаются. Угол между радиус-векторами центров этих окружностей равен α. Это обстоятельство позволяет определить значение параметра α, не обращаясь к положению окружностей относительно системы координат. Рассмотрим случай внутреннего касания



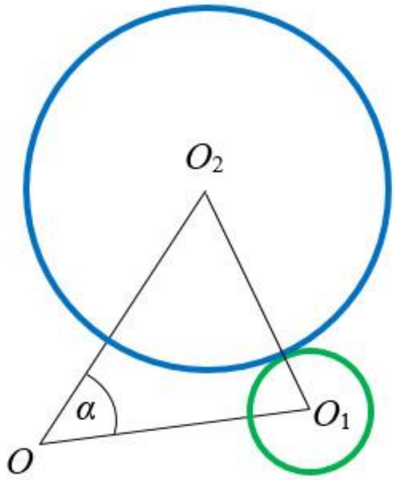
Величина OO_1=4, OO_2=5 и длина O_1O_2 равна разности радиусов окружностей, т.е. 2. Применяя к треугольнику OO_1O_2 теорему косинусов, получаем

$$4 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{16 + 25 - 4}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{37}{40}$$

$$\alpha = \pm\arccos\frac{37}{40} + 2\pi k, k \in Z$$

Рассмотрим случай внешнего касания



Величина OO_1=4, OO_2=5 и длина O_1O_2 равна сумме радиусов окружностей, т.е. 4. Применяя к треугольнику OO_1O_2 теорему косинусов, получаем

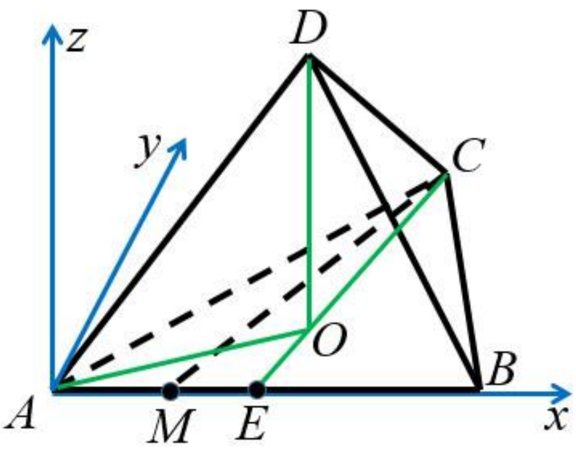
$$16 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{16 + 25 - 16}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

$$\alpha = \pm\arccos\frac{5}{8} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Задача 6 Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Решение. Введем декартову систему координат с началом координат в точке A, ось абсцисс направим вдоль AB, ось ординат – на плоскости основания ABC перпендикулярно оси абсцисс и ось аппликат перпендикулярно плоскости основания тетраэдра



Пусть $AM=\lambda$, E – середина AB. Так как все ребра тетраэдра равны 1, то радиус окружности, описанной около основания

$$R = AO = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Радиус окружности, вписанной в основание

$$r = EO = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Из прямоугольного треугольника DAO находим высоту пирамиды

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Высота равностороннего треугольника ABC со стороной 1

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь можно выписать координаты всех нужных точек

$$A(0,0,0),\ D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ M(\lambda,0,0),\ C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$$

Таким образом

$$\overrightarrow{AD} = \left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\} = \frac{1}{6}\left\{3,\sqrt{3},2\sqrt{6}\right\}$$

$$\overrightarrow{MC} = \left\{\frac{1}{2}-\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\} = \frac{1}{2}\left\{1-2\lambda,\sqrt{3},0\right\}$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через ребро AD параллельно CM. Найдем вектор, перпендикулярный этой плоскости

$$\vec{N} = 6\overrightarrow{AD}\times 2\overrightarrow{MC} = \left\{3,\sqrt{3},2\sqrt{6}\right\}\times\left\{1-2\lambda,\sqrt{3},0\right\} =$$

$$= \left\{-6\sqrt{2},2\sqrt{6}(1-2\lambda),2\sqrt{3}(1+\lambda)\right\} = -2\sqrt{3}\left\{\sqrt{6},\sqrt{2}(2\lambda-1),-1-\lambda\right\}$$

Уравнение искомой плоскости

$$\sqrt{6}x + \sqrt{2}(2\lambda-1)y - (1+\lambda)z = 0$$

Искомая в задаче величина равна расстоянию d от точки M до этой плоскости

$$d = \frac{\left|\sqrt{6}\cdot\lambda + \sqrt{2}(2\lambda-1)\cdot 0 - (1+\lambda)\cdot 0\right|}{\sqrt{6+2(2\lambda-1)^2+(1+\lambda)^2}} = \frac{\lambda\sqrt{6}}{\sqrt{9\lambda^2-6\lambda+9}} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}$$

В нашем варианте величина $\lambda=1/3$ и соответственно

$$d = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: n=5

Задача 2 Ответ: $\pm 1,\ \ \pm 2,\ \ \pm 3,\ \ \pm 6$

Задача 3 Ответ: Например, 2021=248+251+509+1013.

Задача 4 Ответ: не меньше 35

Задача 5 Ответ:

$$a\in\left(-\arccos\frac{3}{5}+2\pi k;-\arccos\frac{13}{15}+2\pi k\right)\cup\left(\arccos\frac{13}{15}+2\pi k;\arccos\frac{3}{5}+2\pi k\right),\ k\in Z$$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{\sqrt{86}}{43}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: n=6

Задача 2 Ответ: $\pm 1,\ \ \pm 5$

Задача 3 Ответ: Например, 2021=121+127+251+509+1013.

Задача 4 Ответ: не меньше 49

Задача 5 Ответ:

$$a\in\left(-\arccos\frac{27}{28}+2\pi k;\arccos\frac{27}{28}+2\pi k\right)\cup\left(\arccos\frac{7}{12}+2\pi k;2\pi-\arccos\frac{7}{12}+2\pi k\right),\ k\in Z$$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: n=9

Задача 2 Ответ: $\pm 1,\ \ \pm 7$

Задача 3 Ответ: Например, 2021=60+61+127+251+509+1013.

Задача 4 Ответ: не меньше 13

Задача 5 Ответ:

$$a\in\left[-\arccos\frac{7}{16}+2\pi k;-\arccos\frac{109}{112}+2\pi k\right]\cup\left[\arccos\frac{109}{112}+2\pi k;\arccos\frac{7}{16}+2\pi k\right],\ k\in Z$$

Задача 6 Ответ: $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$