Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом» 2021,математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки часов образуют с часовой стрелкой угол в 30^0? (сутки начинаются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \le 2|\sin x| - |\cos 2x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 17640$, а $НОД(a,b) = 12$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arcsin(\cos x) = \cos\left(\arcsin(x-a)\right)$ имеет единственное решение?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1:3$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P. Найти расстояние до плоскости P точки N, расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:2$, если длина ребра куба равна $2\sqrt{19}$.

Вариант № 2

1. Сколько раз за сутки секундная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой, а минутная стрелка ей перпендикулярна? (сутки начинаются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\sin^2 2x}{|\cos 3x|} \le 2|\sin 2x| - |\cos 3x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 = 1372140$, а $НОД(a,b) = 54$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arccos(\sin x) = \sin\left(\arccos(x-a)\right)$ имеет ровно два решения?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1:2$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:4$, если длина ребра куба равна 2 .

Вариант № 3

1. Сколько раз за сутки секундная, минутная и часовая стрелки часов лежат на одной прямой? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\cos^2 3x}{|\sin x|} \le 2|\cos 3x| - |\sin x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3603600$, а $НОД(a,b) = 30$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arcsin(\sin x) = \sin\left(|\arcsin(x-a)|\right)$ не имеет решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 3:4$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P . Найти расстояние до плоскости P точки N , расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1:3$, если длина ребра куба равна $3\sqrt{41}$.

Вариант № 4

1. Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки на часах перпендикулярны часовой стрелке? (сутки начинаются и заканчиваются в полночь).

2. Решить неравенство: $\dfrac{\cos^2 4x}{|\sin 3x|} \le 2|\cos 4x| - |\sin 3x|$.

3. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), у которых $НОК(a,b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 10296$, а $НОД(a,b) = 66$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a+b$ принимает минимальное возможное значение и найти это значение (пары (a,b) и (b,a) считать за одну).

4. На столе лежит колода игральных карт 52 листа. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 4. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игрок может забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

5. При каких a уравнение $\arccos(\cos x) = 1 - \left|\cos\left(\arccos(x-a)\right)\right|$ имеет бесконечное число решений?

6. На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 2:5$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P. Найти расстояние до плоскости P точки N, расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 3:4$, если длина ребра куба равна $12\sqrt{6}$.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 4 раза.

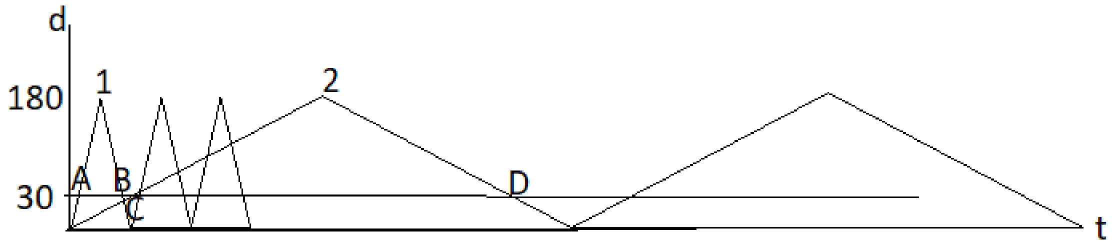
Решение. Скорости движения каждой из стрелок в град/мин следующие:

часовая $-0,5$, минутная – 6, секундная – 360

Относительные скорости:

минутная относительно часовой – 5,5, секундная относительно часовой – 359,5.

Графики зависимости угла между минутной и часовой (2), а также секундной и часовой стрелками (1) от времени изображены на рис



Рис

Через $\alpha(t)$ обозначим угол между секундной и часовой стрелками. Ее период $T_1 = \dfrac{360}{359,5}$, угловой коэффициент $k_1 = 359,5$ на интервале $t \in \left(0; T_1/2\right)$ и $k_1 = -359,5$ на интервале $t \in \left(T_1/2; T_1\right)$. Моменты времени, для которых $\alpha(t) = 30$, описываются двумя сериями:

$$t_k^1 = \frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5}k,\ k = 0,1,2...\ (*)$$

$$t_k^2 = \frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5}k,\ k = 0,1,2...\ (**)$$

Через $\beta(t)$ обозначим угол между минутной и часовой стрелками. Ее период $T_2 = \dfrac{360}{5,5}$, угловой коэффициент $k_2 = 5,5$ на интервале $t \in \left(0; T_2/2\right)$ и $k_2 = -5,5$ на интервале $t \in \left(T_2/2; T_2\right)$ Моменты времени, для которых $\beta(t) = 30$, описываются двумя сериями:

$$\tau_m^1 = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}m,\ m = 0,1,2...(***)$$

$$\tau_m^2 = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5}m,\ m = 0,1,2...\ (****)$$

Условие $\alpha(t) = \beta(t) = 30$ в четырех случаях.

Случай 1. $t_k^1 = \tau_m^1$

$$\frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$719m - 11k = -59$$

Решаем уравнение в целых числах:

$$\begin{cases} k = 719s - 60 \\ m = 11s - 1 \end{cases}$$

Тогда

$$\tau_m^1 = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}(11s-1) = 720s - 60,\ s = 1, 2, 3, \ldots$$

В сутках 1440 минут, поэтому

$$720s - 60 \le 1440 \ \Rightarrow\ s \in \{1, 2\}$$

т.е. случай 1 реализуется за сутки два раза спустя 660 и 1380 минут.

Случай 2. $t_k^1 = \tau_m^2$

$$\frac{30}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$66k - 4314m = 3949$$

Здесь решений нет так как слева стоит четное число, а справа нечетное число.

Случай 3. $t_k^2 = \tau_m^1$

$$\frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{30}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$66k - 4314m = 299$$

Случай также не реализуется так как слева стоит четное число, а справа нечетное число.

Случай 4. $t_k^2 = \tau_m^2$

$$\frac{330}{359,5} + \frac{360}{359,5}k = \frac{330}{5,5} + \frac{360}{5,5}m$$

$$11k - 719m = 649$$

Решаем уравнение в целых числах:

$$\begin{cases} k = 59 + 719s \\ m = 11s \end{cases}$$

За сутки (1440 мин) случай 4 реализуется два раза при $s = 0$ и $s = 1$ спустя 60 и 780 минут после начала суток.

Задача 2 Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

Решение. После преобразований получаем

$$\frac{\sin^2 x - 2|\sin x||\cos 2x| + |\cos 2x|^2}{|\cos 2x|} \le 0$$

$$\frac{\left(|\sin x| - |\cos 2x|\right)^2}{|\cos 2x|} \le 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} |\sin x| = |\cos 2x| \\ \cos 2x \ne 0 \end{cases}$$

Далее решаем уравнение

$$|\sin x| = |\cos 2x|,\quad |\sin x| = |1 - 2\sin^2 x|,\quad \pm\sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -1,\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1,\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Все решения удовлетворяют условию $\cos 2x \ne 0$ и могут быть объединены в одну серию

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$$

Задача 3 Ответ: 1) восемь пар; 2) $(30; 49)$, $(a+b)_{\min} = 948$

Решение

$$НОК(a,b) / НОД(a,b) = 17640 : 12 = 1470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Искомые числа a и b, имеющие заданные наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель, можно представить в виде:

$$a = НОД(a,b) \cdot a_1 = 12 \cdot a_1,\ \ b = НОД(a,b) \cdot b_1 = 12 \cdot b_1,$$

где a_1, b_1 – произвольные взаимно простые числа, для которых

$$a_1 \cdot b_1 = НОК(a,b) / НОД(a,b) = 1470 .$$

Каждое число a_1 равно произведению элементов выборки из четырех чисел $2, 3, 5, 7^2$ по 0,1,2,3 и 4, а $b_1 = 1470 : a_1$. Число таких выборок равно

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 .$$

В условии предполагается, что пары (a,b) неупорядоченные, т.е. $(a,b) = (b,a)$, поэтому общее число пар должно быть уменьшено вдвое.

Функция $y = x + \frac{1470}{x}$ принимает наименьшее значение $x = \tilde{x} = \sqrt{1470} \approx 38,3$, поэтому a_1, при котором $a_1 + b_1 \to \min$, должно наименее отклоняться от $\tilde{x}$. Есть два претендента:

$$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \to b_1 = 49 \to a_1 + b_1 = 79 \to a + b = 12 \cdot 79 = 948$$

и $a_1 = 49, b_1 = 30$, дающий тот же результат.

Задача 4 Ответ $\frac{5}{9}$

Решение

Введем событие A − выигрывает Игнат. Количество упорядоченных случайных пар

$$(m,n), m = 1,2,3;\ n = 1,2,3$$

равно девяти. Случайная величина $m+n$ принимает значения от 2 до 6 с вероятностями

$m+n$	2	3	4	5	6
p	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Гипотеза $H_1 : m+n = 2,\ P(H_1) = \frac{1}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное трем, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P(A / H_1) = 1$

Гипотеза $H_2 : m+n = 3,\ P(H_2) = \frac{2}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное четырем, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P(A / H_2) = 1$

Гипотеза $H_3 : m+n = 4,\ P(H_3) = \frac{3}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное пяти, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать может, забрав со стола одну карту, следовательно, $P(A / H_3) = 0$

Гипотеза $H_4 : m+n=5,\ P(H_4)=\frac{2}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное шести, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать не может, следовательно, $P\left(A/H_4\right)=1$

Гипотеза $H_5 : m+n=6,\ P(H_5)=\frac{1}{9}$

Если игрок при своем ходе сможет оставить на столе число карт кратное семи, то ему обеспечен выигрыш. В противном, это сможет сделать соперник и обеспечить свой выигрыш. При первом ходе Кондрат этого сделать может, забрав со стола одну карту, следовательно, $P\left(A/H_5\right)=0$

Наконец, $P(A)=\sum_1^5 P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1+2+2}{9}=\frac{5}{9}$

Задача 5 Ответ:

$$a\in\left[-\frac{\pi}{2}-1+2\pi k;-\frac{\pi}{2}+1+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}-1+2\pi k;\frac{\pi}{2}+1+2\pi k\right]\cup$$
$$\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2\pi k\right\},\ k\in Z$$

Решение

Функции $y_1=\arcsin(\cos x)$ имеет период 2π и ее график на периоде $\left[-\pi;\pi\right]$ изображен ниже

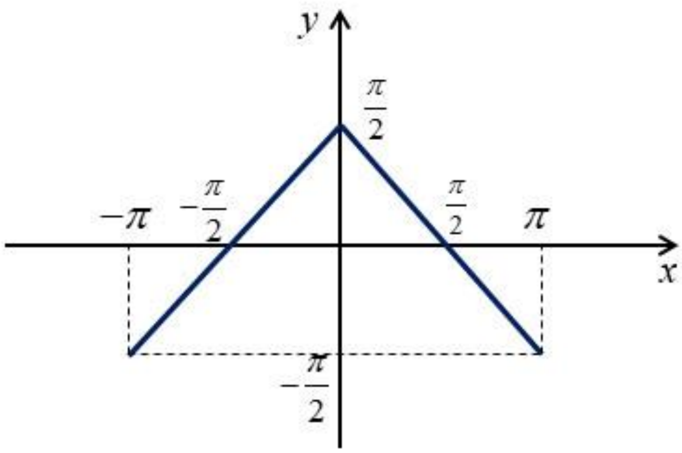
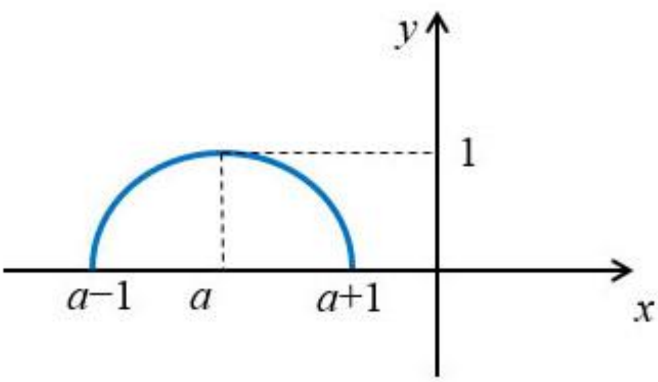
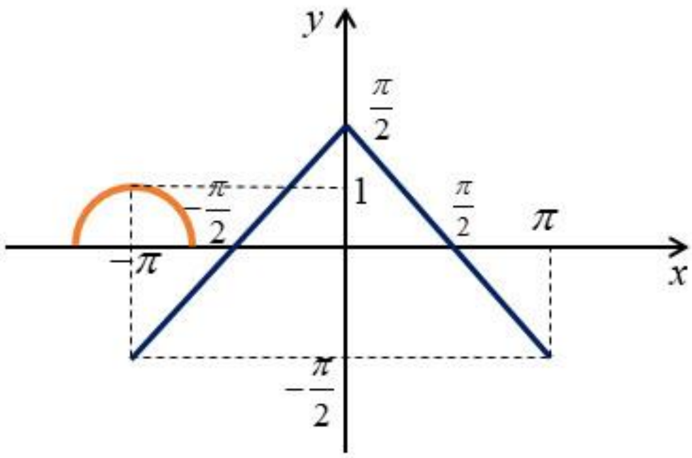


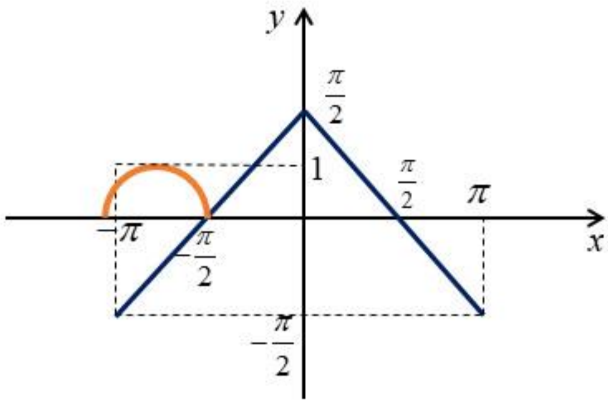
График второй функции $y_2=\cos\left(\arcsin(x-a)\right)=\sqrt{1-(x-a)^2}$ (полуокружность):



Ниже приведено взаимное расположение обоих графиков при $a=-\pi$



При увеличении параметра a график второй функции перемещается вправо вдоль оси абсцисс. Ввиду периодичности первой функции достаточно проследить изменение взаимного расположения графиков на участке длиной в период, т.е. при $-\pi \le a \le \pi$. Найдем критические значения параметра при которых происходит качественное изменение взаимной конфигурации графиков. Первое критическое значение параметра отвечает положению, когда при сдвиге второго графика вправо, он соприкоснется с графиком первой функции



Так как правый конец второго графика имеет абсциссу, равную a+1, то это положение определяется равенством

$$a+1=-\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; a=-\frac{\pi}{2}-1$$

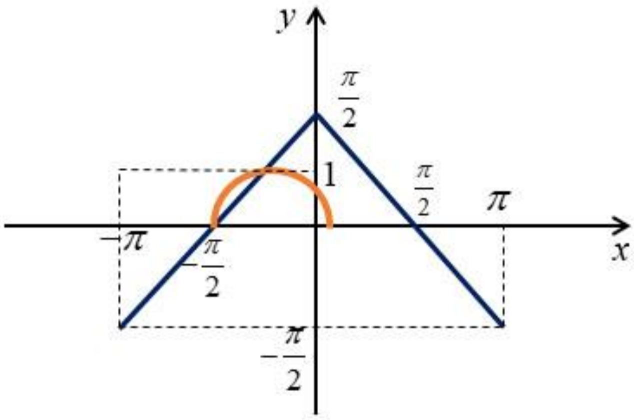
На участке

$$-\pi \le a < -\frac{\pi}{2}-1$$

рассматриваемое уравнение решений не имеет, а при

$$a=-\frac{\pi}{2}-1$$

оно имеет единственное решение. Следующее критическое значение параметра отвечает случаю, когда левый конец второго графика совпадет с точкой –π/2



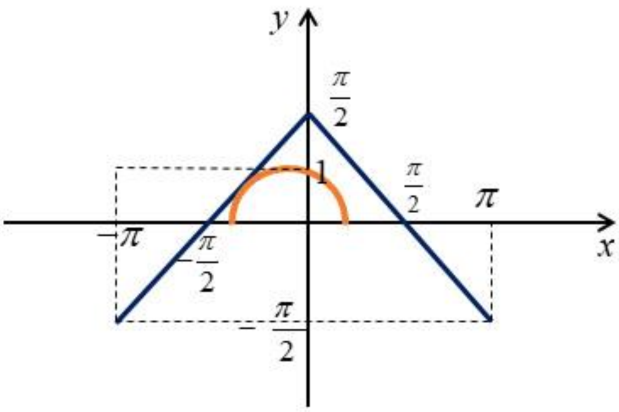
Это положение определяется равенством

$$a-1=-\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; a=-\frac{\pi}{2}+1$$

На участке

$$-\frac{\pi}{2}-1\le a<-\frac{\pi}{2}+1$$

уравнение имеет одно решение. При дальнейшем увеличении параметра уравнение будет иметь два решения до того момента, когда график второй кривой коснется графика первой кривой слева



Найдем значение параметра, отвечающее этому случаю касания. В точке касания производные обеих функций равна

$$-\frac{x-a}{\sqrt{1-(x-a)^2}}=1$$

Из этого уравнения находим абсциссу точки касания

$$x=a-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значение второй функции в этой точке равно $1/\sqrt{2}$. На рассматриваемом участке график первой функции задается уравнением

$$y=x+\frac{\pi}{2}$$

Подставляя сюда координаты точки касания

$$x=a-\frac{1}{\sqrt{2}},\; y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

находим нужное значение параметра

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = a - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}$$

$$a = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

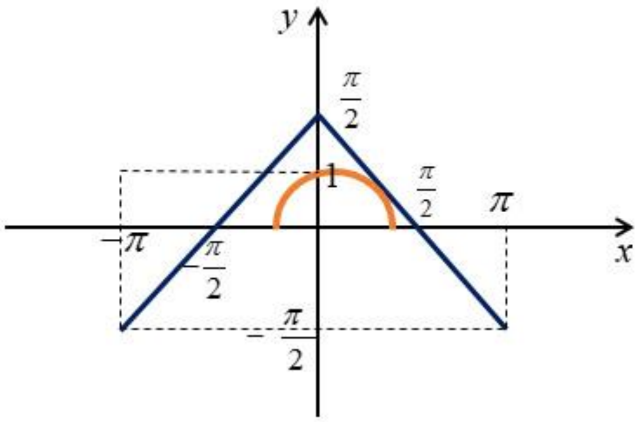
Таким образом, на участке

$$a \in \left[-\frac{\pi}{2} + 1, -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\right)$$

уравнение имеет два решения, а при

$$a = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

оно имеет одно решение. При дальнейшем увеличении параметра (и движении графика второй функции дальше вправо) уравнение не будет иметь решений до тех пор, пока график второй функции не коснется правого участка графика первой функции



Соответствующее значение параметра в силу симметрии со случаем первого касания должно быть противоположным по знаку

$$a = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

Следовательно, при

$$-\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} < a < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

уравнение не имеет решений, а при

$$a = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

решение уравнения единственно. При дальнейшем движении графика второй функции вправо конфигурация меняется симметрично рассмотренному раньше, а критические значения параметра меняют знак, т.е. при

$$a \in \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right]$$

уравнение имеет два решения, а при

$$\frac{\pi}{2} - 1 < a \le \frac{\pi}{2} + 1$$

одно решение и, наконец, при

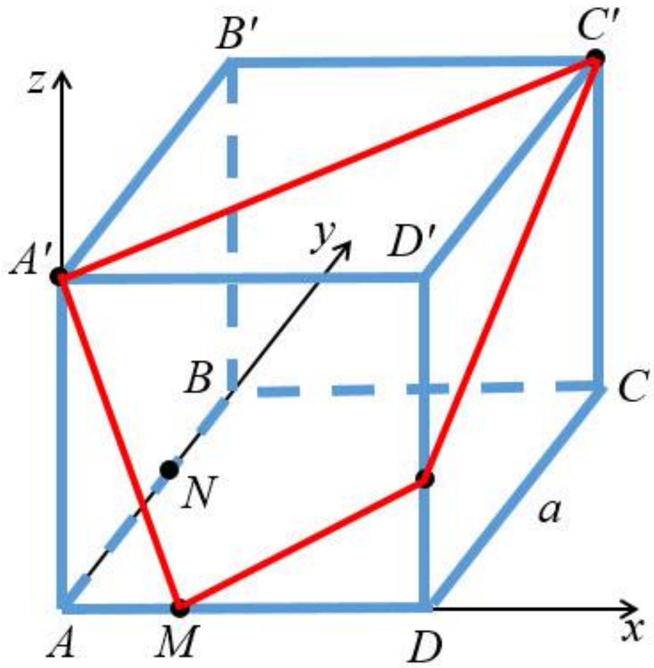
$$\frac{\pi}{2} + 1 < a \le \pi$$

Решений снова не будет. В данном варианте необходимо определить условия единственности решения, с учетом 2π−периодичности это будут следующие значения

$$a \in \left[-\frac{\pi}{2}-1+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+1+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}-1+2\pi k; \frac{\pi}{2}+1+2\pi k\right] \cup$$
$$\cup \left\{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2\pi k\right\},\ k \in Z$$

Задача 6 Ответ: 5.

Решение. Введем декартову систему координат с началом координат в точке *A*, ось абсцисс направим вдоль *AD*, ось ординат – на плоскости основания *ABCD* перпендикулярно оси абсцисс и ось аппликат перпендикулярно плоскости основания



Обозначим ребро куба через *a*, отношения

$$\frac{AM}{AD}=\lambda,\ \frac{AN}{AB}=\mu$$

Выписываем координаты нужных нам точек

$$A'(0,0,a),\ M(0,\lambda a,0),\ N(0,\mu a,0),\ C'(a,a,a)$$

Находим координаты нужных векторов

$$\overrightarrow{A'M}=\{\lambda a,0,0\},\ \overrightarrow{A'C}=\{a,a,0\}$$

Вычисляем вектор, перпендикулярный плоскости *P*

$$\vec{N}=\overrightarrow{A'M}\times\overrightarrow{A'C}=\{a^2,-a^2,\lambda a^2\}=a^2\{1,-1,\lambda\}$$

Находим уравнение плоскости *P*

$$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)-\lambda\cdot(z-a)=0$$
$$x-y+\lambda z-\lambda a=0$$

Находим расстояние *d* от точки *N* до плоскости *P*

$$d=\frac{|0-\mu a+0-\lambda a|}{\sqrt{1+1+\lambda^2}}=\frac{(\lambda+\mu)a}{\sqrt{2+\lambda^2}}$$

В нашем варианте

$$\lambda = \frac{1}{3},\ \mu = \frac{1}{2},\ a = 2\sqrt{19}$$

и соответственно

$$d = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) 2\sqrt{19}}{\sqrt{2 + \frac{1}{9}}} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{19} \cdot 3}{6\sqrt{19}} = 5$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: ни разу

Задача 2 Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z,\ n \neq 5k+1,\ k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z,\ n \neq 5k+4,\ k \in Z \end{array}\right.$

Задача 3 Ответ: 1) 16 пар; 2) $(6534;11340)$, $(a+b)_{\min} = 17874$

Задача 4 Ответ: $\frac{2}{9}$

Задача 5 Ответ: $a \in \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

Задача 6 Ответ: 1.

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 4 раза (исключая конечное положение).

Задача 2 Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$

Задача 3 Ответ: 1) 32 пары; 2) $(9360;11550)$, $(a+b)_{\min} = 20910$

Задача 4 Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a \in (-\pi + 2\pi k, 2\pi k),\ k \in Z$

Задача 6 Ответ: 13.

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 4 раза.

Задача 2 Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7},\ n \in Z$

Задача 3 Ответ: 1) 4 пары; 2) $(792;858)$, $(a+b)_{\min} = 1650$

Задача 4 Ответ: $\frac{1}{8}$

Задача 5 Ответ: $a = \pm 1 + 2\pi n,\ n \in Z$

Задача 6 Ответ: 23.