Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, Москва, март 2021

Вариант № 1

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 3, 5 и 6 в остатке 1, а при делении на 11 – остаток 5.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\left(\cos^2 x+1{,}5\sin x\right)\left(3\cos^2 x-1{,}5\sin x\right)} \geq 2\cos^2 x.$$

3. Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями $\begin{cases} 2a_{n+1}=\sqrt{3}a_n-b_n \\ 2b_{n+1}=a_n+\sqrt{3}b_n \end{cases}$, $a_1=b_1=1$ для всех натуральных n. Найти наименьшее натуральное число m, для которого $a_{n+m}=a_n$, $b_{n+m}=b_n$ при любых n. Найти значения a_{2021} и b_{2021}.

4. 4. Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения $x^3-x+2=0$ является корнем другого, также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

5. Точки O и Q – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM:MQ=2$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B.

Ответы и решения

1. Пусть n – искомое число. Тогда $n-1$ делится на 3, 5 и 6, т.е. делится на $НОК(3,5,6)=30$ и $n=30k+1$. По условию $n=11m+5$. Приравнивая полученные выражения, получим уравнение для m и n:

$$30k+1=11m+5 \to 30k-11m=4 \to \begin{cases} k=6+11s \\ m=16+30s \end{cases}, s=0,1,.. \to$$

$$n=30\left(6+11s\right)+1=330s+181$$

$$n_{\min}=181$$

Ответ: $n_{\min}=181$.

2. Введем следующие обозначения:

$$a=\cos^2 x+1,5\sin x,\; b=3\cos^2 x-1,5\sin x \to a+b=4\cos^2 x$$

Если x решение неравенства, то $a>0, b>0$ и исходное неравенство примет вид:

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{ab}.$$

Последнее неравенство (при переносе всех слагаемых влево) представляет собой полный квадрат, может выполняться только при $a=b$:

$$\cos^2 x+1,5\sin x=3\cos^2 x-1,5\sin x \to 2\cos^2 x-3\sin x=0$$

$$\to 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \to$$

$$\to \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x=-2 \to \varnothing \end{array}\right. \to x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \to a>0, b>0$$

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

3. Найдем связь между последовательными парами (a_n, b_n)

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n \end{cases} \to \begin{cases} a_{n+1}=\cos\alpha\cdot a_n-\sin\alpha\cdot b_n \\ b_{n+1}=\sin\alpha\cdot a_n+\cos\alpha\cdot b_n \end{cases},\; \alpha=\frac{\pi}{6}$$

Подставляя в последние соотношения выражения a_n, b_n через a_{n-1}, b_{n-1}

$$\begin{cases} a_n = \cos\alpha \cdot a_{n-1} - \sin\alpha \cdot b_{n-1} \\ b_n = \sin\alpha \cdot a_{n-1} + \cos\alpha \cdot b_{n-1} \end{cases},$$

получим

$$\begin{cases} a_{n+1} = \cos 2\alpha \cdot a_{n-1} - \sin 2\alpha \cdot b_{n-1} \\ b_{n+1} = \sin 2\alpha \cdot a_{n-1} + \cos 2\alpha \cdot b_{n-1} \end{cases}.$$

Продолжая процесс, получим

$$\begin{cases} a_{n+1} = \cos n\alpha \cdot a_1 - \sin n\alpha \cdot b_1 \\ b_{n+1} = \sin n\alpha \cdot a_1 + \cos n\alpha \cdot b_1 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \cos n\alpha - \sin n\alpha = \sqrt{2}\cos\left(n\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ b_{n+1} = \sin n\alpha + \cos n\alpha = \sqrt{2}\sin\left(n\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Вычисление минимального периода:

$$a_{n+m} = a_n, \alpha = \frac{\pi}{6}, \forall n \to \sqrt{2}\cos(n\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos((n+m)\alpha + \frac{\pi}{4}) \to$$

$$\begin{cases} (n+m)\dfrac{\pi}{6} = n\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \to m = 12k \\ \dfrac{(2n+m+3)\pi}{6} = 2\pi s \to \varnothing \end{cases} \to$$

$$\to m = 12$$

$$b_{n+12} = b_n$$

Минимальный период равен 12.

Вычисление значений a_{2021} и b_{2021}:

$$2021 = 8 \cdot 252 + 5 = 8 \cdot 252 + 4 + 1$$

$$a_{2021} = a_5 = 1 \cdot \cos\frac{4\pi}{6} - 1 \cdot \sin\frac{4\pi}{6} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},$$

$$b_{2021} = b_5 = 1 \cdot \sin\frac{4\pi}{6} + 1 \cdot \cos\frac{4\pi}{6} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: 1) $m_{\min} = 12$; 2) $a_{2021} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $b_{2021} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

4. Пусть p – корень уравнения $x^3 - x + 2 = 0$, т.е. $p^3 = p - 2$.

По условию, p^2 является корнем уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с некоторыми коэффициентами a, b, c, d . Тогда

$$ap^6 + bp^4 + cp^2 + d = 0 \to a(p-2)^2 + bp(p-2) + cp^2 + d = 0 \to$$

$$\to (a+b+c)p^2 + (-4a-2b)p + (4a+d) = 0$$

Полагая все коэффициенты последнего уравнения нулями, приходим к системе

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -4a - 2b = 0 \to b = -2a,\ c = a,\ d = -4a \\ 4a + d = 0 \end{cases}$$

Тогда искомое уравнение при $a = 1$ примет вид $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$.

Другое решение:

Пусть p_1, p_2, p_3 - корни уравнения $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = (x - p_1)(x - p_2)(x - p_3) =$$

$$= x^3 - (p_1 + p_2 + p_3)\,x^2 + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)\,x - p_1 p_2 p_3$$

Тогда по теореме Виета:

$a = -(p_1 + p_2 + p_3)$,   *(1)*

$b = (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)$,   *(2)*

$c = - p_1 p_2 p_3$ (3).

Для исходного уравнения $x^3 - x + 2 = 0$ получаем

$0 = -(p_1 + p_2 + p_3)$,
$-1 = (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)$,
$2 = - p_1 p_2 p_3$

Для нового уравнения $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$ ищем коэффициенты, выражая их через корни:

$a = -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$,
$b = (p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2)$,
$c = - p_1^2 p_2^2 p_3^2$

Для нахождения новых коэффициентов используем соотношения (1 – 3), (возведем их в квадрат):

$a = -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) =$
$= 0 - 2*1 = -2$,

$b = (p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2) =$
$= (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)^2 - 2(p_1^2 p_2^2 p_3^2)(p_1 + p_2 + p_3) =$
$= 1 - 0 = 1$,

$c = - p_1^2 p_2^2 p_3^2 = (p_1 p_2 p_3)^2 = -2^2 = -4$.

Тогда искомое уравнение примет вид

$x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$.

Ответ: $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$.

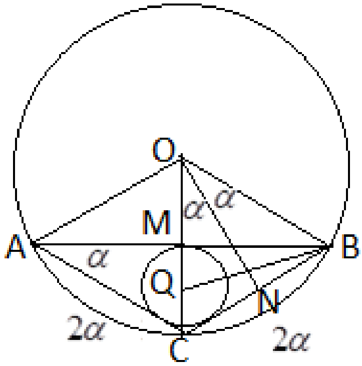
5. Из условия, точки O и Q лежат на срединном перпендикуляре отрезка AB, треугольник ABC равнобедренный, тупоугольный, с углом α при основании, $4\alpha < \pi \to \alpha < \frac{\pi}{4} \to \cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обозначения:

r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности;

$$QM = r,\ MO = qr,\ QC = tr \to r(1+q+t) = R \to \frac{R}{r} = 1+q+t \quad (*)$$

$$BM = R\sin 2\alpha,\ BC = 2R\sin\alpha$$



По свойству биссектрисы BQ

$$\frac{BC}{BM}=\frac{QC}{MQ}=t\to t=\frac{2R\sin\alpha}{R\sin 2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Из прямоугольного треугольника BMO

$$\frac{qr}{R}=\cos 2\alpha\to\frac{R}{r}=\frac{q}{\cos 2\alpha}\quad (**)$$

Объединяя (*) и (**), получим уравнение для определения $\cos\alpha$

$$q+1+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{q}{\cos 2\alpha}\to x=\cos\alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}\to$$

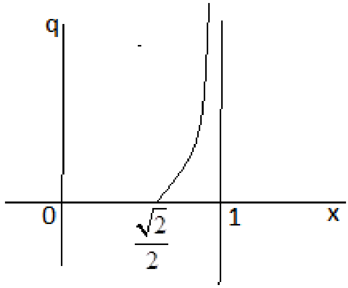
$$2(q+1)x^3+2x^2-(2q+1)x-1=0\quad (***)$$

Выразим q из уравнения (***)

$$q=\frac{-2x^3-2x^2+x+1}{2x^3-2x}=\frac{(x+1)(1-2x^2)}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{1-2x^2}{2x(x-1)}\to$$

$$2(q+1)x^2-2qx-1=0\quad (****)$$

График зависимости $q(x)$ изображен на рис:



Для любого $q > 0$ найдется единственный

$x = \cos\alpha \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$, удовлетворяющий уравнению (****).

Ответ: углы при вершинах A и B равны $\alpha = \arccos\frac{2+\sqrt{10}}{6}$,

угол при вершине C равен $\pi - 2\alpha$.

Вариант № 2

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 3, 5 и 7 в остатке 2, а при делении на 9 – остаток 5.

Ответ: $n_{\min} = 212$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\left(|\sin x| - 3,5\cos 2x\right)\left(8|\sin x| + 3,5\cos 2x\right)} \geq 4,5|\sin x|.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

3. Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями $\begin{cases} 2a_{n+1} = a_n - \sqrt{3}b_n \\ 2b_{n+1} = \sqrt{3}a_n + b_n \end{cases}$, $a_1 = 0; b_1 = 1$ для всех натуральных n. Найти наименьшее натуральное число m,

для которого $a_{n+m} = a_n$, $b_{n+m} = b_n$ при любых n. Найти значения a_{2019} и b_{2019}.

Ответ: 1) $m_{\min} = 6$; 2) $a_{2019} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; b_{2019} = -\dfrac{1}{2}$

4. Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения $x^3 - 2x - 3 = 0$ является корнем другого, также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

Ответ: $x^3 - 4x^2 + 4x - 9 = 0$.

5. Точки O и Q – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM : MQ = 1:2$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B.

Ответ: углы при вершинах A и B равны $\alpha = \arccos \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$,

угол при вершине C равен $\pi - 2\alpha$.

Вариант № 3

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 5, 7 и 8 в остатке 3, а при делении на 13 – остаток 7.

Ответ: $n_{\min} = 2243$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\left(tg^2 x + 6\cos x\right)\left(3tg^2 x - 6\cos x\right)} \ge 2tg^2 x$$

Ответ: $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

3. Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями $\begin{cases}\sqrt{2}a_{n+1}=a_n-b_n\\ \sqrt{2}b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$, $a_1=1; b_1=-1$ для всех натуральных n. Найти наименьшее натуральное число m, для которого $a_{n+m}=a_n$, $b_{n+m}=b_n$ при любых n. Найти значения a_{2020} и b_{2020}.

Ответ: 1) $m_{\min}=8$; 2) $a_{2020}=0; b_{2020}=-\sqrt{2}$

4. Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения $x^3+x-3=0$ является корнем другого также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

Ответ: $x^3+2x^2+x-9=0$

5. Точки O и Q – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM:MQ=3$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B.

Ответ: углы при вершинах A и B равны $\alpha=\arccos\dfrac{3+\sqrt{17}}{8}$,

угол при вершине C равен $\pi-2\alpha$

Вариант № 4

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 2, 5 и 9 в остатке 1, а при делении на 17 – остаток 6.

Ответ: $n_{\min}=91$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\left(\left|\cos x\right| + 0,5\sin 2x\right)\left(2\left|\cos x\right| - 0,5\sin 2x\right)} \geq 1,5\left|\cos x\right|.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

3. Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} a_{n+1} = \cos 15^0 \cdot a_n - \sin 15^0 \cdot b_n \\ b_{n+1} = \sin 15^0 \cdot a_n + \cos 15^0 \cdot b_n \end{cases}, \quad a_1 = 1; b_1 = 0$$

для всех натуральных n . Найти наименьшее натуральное число m , для которого $a_{n+m} = a_n$, $b_{n+m} = b_n$ при любых n . Найти значения a_{2025} и b_{2025} .

Ответ: 1) $m_{\min} = 24$; 2) $a_{2025} = -\dfrac{1}{2}; b_{2025} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения $x^3 + 2x - 5 = 0$ является корнем другого также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

Ответ: $x^3 + 4x^2 + 4x - 25 = 0$

5. Точки O и Q – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM : MQ = 1:3$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B .

Ответ: углы при вершинах A и B равны $\alpha = \arccos\dfrac{3}{4}$,

угол при вершине C равен $\pi - 2\alpha$