Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», весна 2021, математика, 10 класс

Вариант № 1

1. Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал свой большой правильный треугольник (без дырок), то оказалось, что Вася использовал на него на 161 треугольник больше, чем Петя. Сколько треугольников использовал Петя, если у него их было не более 100 штук?

2. Найти целые x, для которых $x^2 \sin\frac{\pi x}{2} \geq 10 - 6\cos\frac{\pi x}{3}$.

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x=2$ принимает значение 3, а при $x=4-$ его значение равно 1. Известно, что уравнение $P(n)=n-1$ имеет целое решение. Найти это решение.

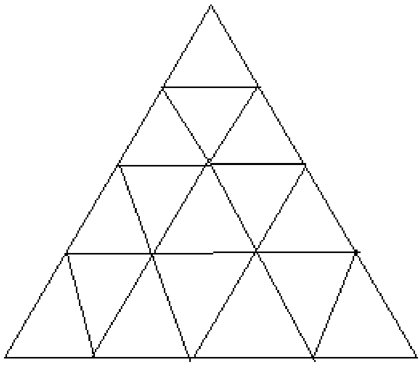
4. Найти шесть ненулевых целых чисел, произведение которых не меняется, если из каждого них вычесть двойку.

5. Муравейник, в котором проживает муравей Гоша, имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 50 см и плоским углом при вершине $\pi/6$. Гоша совершил прогулку по поверхности муравейника, выйдя из вершины основания, возвратившись в нее же и побывав на всех боковых гранях муравейника. Во время своей прогулки Гоша никогда не приближался к вершине муравейника ближе, чем на 30 см. Какое наименьшее возможное расстояние мог преодолеть Гоша за время прогулки?

Ответы и решения

1. Пусть длина стороны правильного треугольника, собранного Петей, равняется $n \cdot a$, где a – длина стороны картонного треугольника. Тогда общее число треугольников, использованных при построении Петей, равно n^2. Действительно, начинаем счет от вершины (по слоям):

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$



n

Число треугольников, используемых Васей, равно m^2 и, по условию, $m^2-n^2=161$ или $(m-n)(m+n)=7\cdot 23$. Так как числа 7 и 23 взаимно простые, то для нахождения натуральных чисел m и n в нашем случае возможны только следующие два случая:

Случай 1. $\begin{cases} m-n=7 \\ m+n=23 \end{cases}$

Решениями этой системы являются числа m=15 и n=8, и $n^2=64<100$.

Случай 2. $\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=161 \end{cases}$

Решениями этой системы являются числа m=81, n=80, и $n^2=1600>100$. Условиям задачи отвечает только первый ответ $n^2=64$

Ответ: 64

2. Разобьем все целые числа на 6 классов:

Случай 1. $x=6k,\ k\in Z$

Неравенство примет вид $0\geq 4$. Следовательно для таких значений x неравенство не выполняется.

Случай 2. $x=6k+1,\ k\in Z$

Неравенство примет вид $(6k+1)^2 \cdot \sin(3k\pi + \frac{\pi}{2}) \geq 10 - 6\cos(2\pi k + \frac{\pi}{3})$, которое можно записать в виде $(-1)^k(6k+1)^2 \geq 7$. Очевидно, что при $k = 2m+1, m \in Z$ это неравенство не выполняется. При k=2m получим $(12m+1)^2 \geq 7$. Очевидно, это неравенство выполняется для любого m$\neq 0$, $m \in Z$. Следовательно, $x = 12m + 1$, $m \in Z$, m$\neq 0$ будет решением заданного неравенства.

Случай 3. $x = 6k + 2, k \in Z$

Неравенство примет вид $0 \geq 13$. Следовательно, для таких значений x неравенство не выполняется.

Случай 4. $x = 6k + 3, k \in Z$

Неравенство примет вид

$$(6k+3)^2 \cdot \sin(3\pi k + \frac{3\pi}{2}) \geq 10 - 6\cos(2\pi k + \pi).$$

Перепишем его в виде

$$(-1)^{k+1} \cdot (6k+3)^2 \geq 16 .$$

При k=2m , $m\in Z$ это неравенство не имеет решений. При k=2m+1, $m\in Z$ получим неравенство $(12m+9)^2 \geq 16$, которое справедливо для любого $m \neq -1, m \in Z$. Следовательно, x=12m+9, m$\in Z, m \neq -1$ будет решением заданного неравенства.

Случай 5. $x = 6k + 4, k \in Z$

Неравенство примет вид 0$\geq$ 13 Следовательно, для таких значений x неравенство не выполняется.

Случай 6. $x = 6k + 5, k \in Z$

Неравенство примет вид

$$(6k+5)^2 \cdot \sin(3\pi k + \frac{5\pi}{2}) \geq 10 - 6\cos(2\pi k + \frac{5\pi}{3}) .$$

Перепишем его в виде $(-1)^k \cdot (6k+5)^2 \geq 7$. Очевидно, при k=2m+1, m$\in Z$ это неравенство не имеет решений. При k=2m, m$\in Z$ это неравенство примет вид $(12m+5)^2 \geq 7$, которое справедливо для любого m$\in Z$. Следовательно, x=12m+5, m$\in Z$ является решением исходного неравенства. Резюмируя все эти случаи, получим окончательный ответ.

Ответ: $x = 12m + 1, m \in Z, m \neq 0$, $x = 12m + 9, m \in Z, m \neq -1$, $x = 12m + 5, m \in Z$

3. Заметим, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых целых чисел n и a выражение $P(n)-P(a)$ делится нацело на $(n-a)$ (Следует из формул сокращенного умножения). Тогда для некоторого n :

$$P(n)-P(2)=n-1-3=n-4 \text{ делится на } n-2$$

(так как P(n)=n−1, а P(2)=3)

$$P(n)-P(4)=n-1-1=n-2 \text{ делится на } n-4$$

(так как P(n)=n−1, а P(4)=1)

Это бывает, если $|n-2| = |n-4|$. Следовательно, $n-2 = 4-n$ или n=3.

Ответ: n=3

4. Рассмотрим шесть чисел: $n, n+2, n+4, n+6, n+8, x.$ Если из каждого вычесть 2, то они превратятся в числа

$$n-2, n, n+2, n+4, n+6, x-2$$

Их произведение не изменится, если $(n-2)(x-2) = x(n+8)$. Раскрывая скобки, получим $4-2x-2n = 8x$ или $5x=2-n$. Последнее уравнение нужно решить в целых числах, ни одно из которых не равно нулю:

$$\begin{cases} x=t \\ n=2-5t \end{cases}, t \in Z, t \neq 0, t \neq 2$$

Тогда искомые числа имеют вид:

$$a_1 = 2-5t, a_2 = 4-5t, a_3 = 6-5t, a_4 = 8-5t, a_5 = 10-5t, a_6 = t$$

для любого целого $t \neq 0; 2$

Ответ: например,

$$a_1 = 2-5t, a_2 = 4-5t, a_3 = 6-5t, a_4 = 8-5t, a_5 = 10-5t, a_6 = t$$

для любого $t \in Z, t \neq 0, t \neq 2$

5. Введем обозначения: через b обозначим боковое ребро пирамиды, через α − плоский угол при вершине, а через r− расстояние до вершины пирамиды.

Рассмотрим развертку пирамиды.

Если $r \leq r_1 = b\cos 2\alpha$, тогда длина кратчайшего пути будет равна длине хорды AA, то есть L= $2b\sin 2\alpha$ (см рис 1).

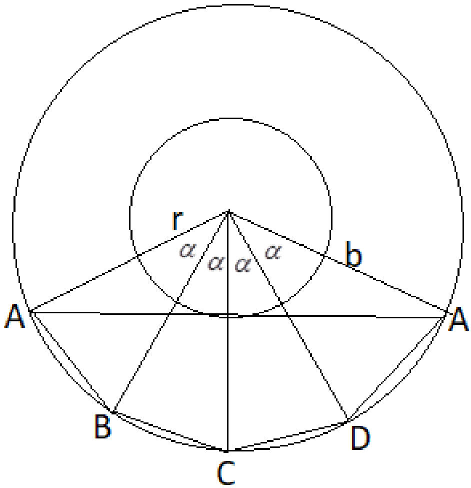


Рис 1

По условию задачи b=50, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, r=30, $r_1 = 50\cos\frac{\pi}{3} = 25$. Так как $r = 30 > 25 = r_1$, то хорда АА пересекает окружность радиуса$r = 30$. В этом случае кратчайший путь будет равен (см. рис.2.)

$$L = AM + MN + NA\ ,$$

где AM и AN – касательные, проведенные к окружности радиуса r (M, N точки касания), а MN$-$длина дуги окружности радиуса r=30, заключённая между точками касания M и N.

Покажем, что это действительно кратчайший путь. Рассмотрим траекторию, отмеченную жирной линией на рис.2. Она пересекает радиус ОС в некоторой точке К. Тогда, очевидно, что длина этой линии больше чем 2АК (так как отрезок, соединяющий точки А и К всегда короче любой линии, соединяющей эти точки) В свою очередь 2АК$> 2AP$ (так как из двух наклонных та длиннее, у которой больше проекция) Итак, минимальное расстояние не будет превосходить 2АР.Траектория оптимального пути не может пересекать касательные АМ и АN, но не совпадать с ними (так как отрезок всегда короче кривой, соединяющей его концы.) Осталось установить, что длина дуги MN меньше суммы длин отрезков MP и PN :

$$PN + PM = 2r\,tg\,\beta > 2r \cdot \beta = MN \ ,$$

где $\beta = 2\alpha - arccos\frac{r}{b} = \frac{\pi}{3} - arccos\frac{3}{5}$.

Следовательно, действительно минимальное расстояние равно L=AM+MN+NA.

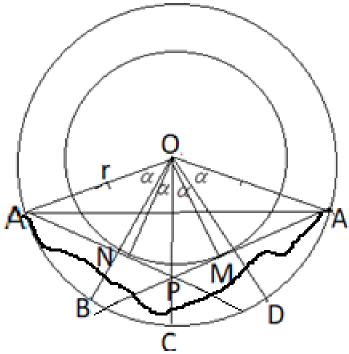


Рис 2

Так как AM=AN=$\sqrt{b^2 - r^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$, а длина дуги MN= $60(\frac{\pi}{3} - arccos\frac{3}{5})$, то кратчайший путь L будет равен L=$80 + 60(\frac{\pi}{3} - arccos\frac{3}{5})$=$80 + 20\pi - 60arccos\frac{3}{5}$

Ответ: $80 + 20\pi - 60\arccos\frac{3}{5}$

Вариант № 2

1. Петя добирается от дома до школы на автобусе. Проехав треть пути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 4 минуты и, сохранив прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 6 мин дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

Ответ: 18 минут.

1. Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал свою равнобокую трапецию (без дырок), то оказалось, что у Васи большее основание трапеции на одну сторону треугольника больше, чем у Пети, а меньшее основание наоборот – на одну сторону меньше. Вася использовал в своей работе 119 треугольников. Сколько треугольников использовал в своей работе Петя?

Ответ: 85

2. Найти целые положительные x, для которых

$$x^2 \sin\frac{\pi x}{2} \le x\cos\frac{\pi x}{3}.$$

Ответ:

$$x = 6m,\ m > 0,\ m \in Z,\ x = 12k + 3,\ x = 12k + 5,\ x = 12k + 7,\ k \ge 0,\ k \in Z$$

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x = 3$ принимает значение 8, а при $x = 5$ – его значение равно 6. Известно, что уравнение $P(n) = n + 3$ имеет целое решение. Найти это решение.

Ответ: n=4

4. Найти семь ненулевых целых чисел, произведение которых не меняется, если из каждого из них вычесть тройку.

Ответ: например,

$$a_1 = 3 - 6t, a_2 = 6 - 6t, a_3 = 9 - 6t, a_4 = 12 - 6t, a_5 = 15 - 6t,$$

$$a_6 = 18 - 6t, a_7 = t$$

для любого $t \in Z, t \ne 0, t \ne 1, t \ne 2, t \ne 3$

5. Муравейник, в котором проживает муравей Гоша, имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 130 см и плоским углом при вершине $\pi/3$. Гоша совершил прогулку по поверхности муравейника, выйдя из вершины основания, возвратившись в нее же и побывав на всех боковых гранях муравейника. Во время своей прогулки Гоша никогда не приближался к вершине муравейника ближе, чем на 50 см. Какое наименьшее возможное расстояние мог преодолеть Гоша за время прогулки?

Ответ: $240+\dfrac{200\pi}{3}-100\arccos\dfrac{5}{13}$

Вариант № 3

1. Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал ромб (без дырок), то оказалось, что Вася использовал в своей работе на 110 картонных треугольников меньше, чем Петя. Сколько треугольников использовал в работе Петя, если общее число треугольников не превосходило 500?

Ответ: 128

2. Найти все четные числа x, для которых

$$x^2\sin\frac{\pi x}{6}\le 9+16\cos\frac{\pi x}{3}.$$

Ответ: $x=6m, m\in Z,\ x=12m+8, m\in Z, x=12m+10, m\in Z$

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x=-2$ принимает значение 7, а при $x=6$ – его значение равно -1. Известно, что уравнение $P(2n)=2n+1$ имеет целое решение. Найти это решение.

Ответ: n=1.

4. Найти восемь ненулевых целых чисел, произведение которых не меняется, если из каждого них вычесть четверку.

Ответ: например,

$a_1=4-7t, a_2=8-7t, a_3=12-7t, a_4=16-7t, a_5=20-7t, a_6=24-7t,$

$a_7=28-7t, a_8=t$

для любого $t\in Z, t\ne 0, t\ne 4$

5. Муравейник, в котором проживает муравей Гоша, имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 100 см и плоским углом при вершине $\pi / 4$. Гоша совершил прогулку по поверхности муравейника, выйдя из вершины основания, возвратившись в нее же и побывав на всех боковых гранях муравейника. Во время своей прогулки Гоша никогда не приближался к вершине муравейника ближе, чем на 50 см. Какое наименьшее возможное расстояние мог преодолеть Гоша за время прогулки?

Ответ: $100\left(\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Вариант № 4

1. Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал правильный шестиугольник (без дырок), то оказалось, что Вася использовал на 462 картонных треугольников меньше, чем Петя. Сколько треугольников использовал на свою работу Петя, если общее число треугольников не превосходило 1000?

Ответ: 486.

2. Найти все нечетные числа x, для которых

$$x^2 \cos\frac{\pi x}{3} \le 2x - \sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{4}.$$

Ответ: $x=1, x=12m+3, m\in Z,\;\; x=12m+9, m\in Z$

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x=-1$ принимает значение 15, а при $x=13$ – его значение равно 1. Известно, что уравнение $P(3n)=3n+2$ имеет целое решение. Найти это решение.

Ответ: n=2.

4. Найти девять ненулевых целых чисел, произведение которых не меняется, если из каждого них вычесть пятерку.

Ответ: например,

$a_1 = 5 - 8t, a_2 = 10 - 8t, a_3 = 15 - 8t, a_4 = 20 - 8t, a_5 = 25 - 8t, a_6 = 30 - 8t,$

$a_7 = 35 - 8t,\ a_8 = 40 - 8t, a_9 = t$

для любого $t \in Z, t \neq 0, t \neq 5$

5. Муравейник, в котором проживает муравей Гоша, имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 48 см и плоским углом при вершине $5\pi / 12$. Гоша совершил прогулку по поверхности муравейника, выйдя из вершины основания, возвратившись в нее же и побывав на всех боковых гранях муравейника. Во время своей прогулки Гоша никогда не приближался к вершине муравейника ближе, чем на 12 см. Какое наименьшее возможное расстояние мог преодолеть Гоша за время прогулки?

Ответ: $24\sqrt{15} + 20\pi - 24\arccos\dfrac{1}{4}$