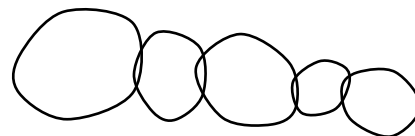
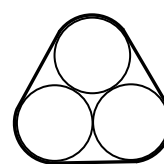


**Задания, решения и критерии оценки работ заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников
9 класс, 2023-2024 учебный год**

1. Из провода длиной l и площадью поперечного сечения S изготовили пять замкнутых проводников разных длин и зацепили их в цепочку так, как это показано на рисунке. Как имея в распоряжении только омметр (прибор для измерения сопротивлений) и проводя только одно измерение, определить удельное сопротивление провода, не разрезая проводников. Считать, что в точках касания проводников между ними есть электрические контакты. Описать последовательность действий, которые нужно выполнить для измерения, и привести расчетные формулы для вычисления удельного сопротивления.



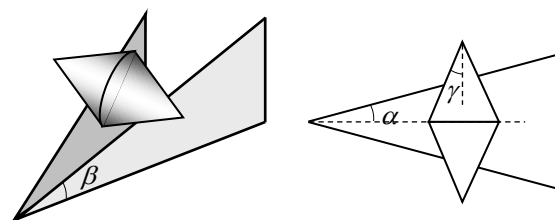
2. Имеется упругое резиновое кольцо, коэффициент жесткости которого равен k . Кольцо растянули и надели на три одинаковых цилиндра радиуса R (см. рисунок; вид с торца цилиндров). Найти силы взаимодействия цилиндров, если длина недеформированного кольца - $7R$. Считать, что для любых удлинений кольца работает закон Гука



3. Во многих странах мира с целью экономии ископаемого топлива (нефти) часть бензина в автомобильном топливе заменяют спиртом, изготовленным из растительного сырья (биоэтанол). Приготовили такую смесь бензина и биоэтанола, что вклад бензина в теплотворную способность смеси втрое больше вклада биоэтанола. Считая, что удельная теплота сгорания бензина $q_B = 44$ МДж/кг, а биоэтанола $q_Э = 29$ МДж/кг, найти массовые доли бензина и этанола в смеси. Найти также удельную теплоту сгорания смеси.

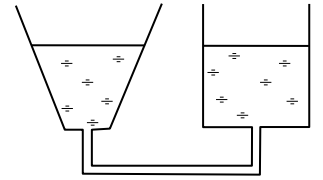
4. После того как часы показали 12 часов ночи, что-то пошло не так, и часовая стрелка стала двигаться назад (противоположно обычному направлению) с втрое большей, чем раньше, угловой скоростью. Минутная стрелка продолжала идти правильно. Сколько раз за следующие сутки минутная стрелка на этих часах оказывалась перпендикулярной часовой стрелке? Ответ обосновать.

5. Есть два одинаковых конуса с углом при вершине 2γ . Конусы склеили основаниями и положили на две одинаковые дощечки в форме прямоугольных треугольников с одним из острых углов β . Дощечки расположили перпендикулярно земле так, что угол между ними равен 2α (правый рисунок – вид сверху).



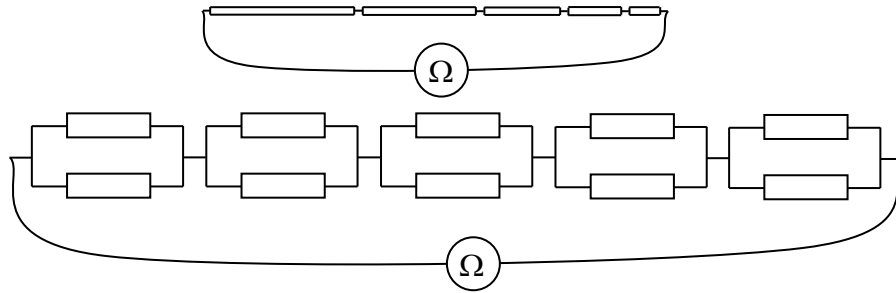
Описать поведение конусов в зависимости от углов α , β и γ . При каком соотношении углов конусы будут находиться в равновесии? При каком соотношении углов будут двигаться вверх, а при каком вниз?

6. Система из двух стеклянных сообщающихся сосудов, один из которых является цилиндрическим, а второй имеет форму перевернутого усеченного конуса, заполнена водой (см. рисунок). В некоторый момент времени воду в коническом сосуде нагревают. Как при этом изменится уровень воды в цилиндрическом сосуде? Считать, что коэффициент термического расширения стекла много меньше коэффициента термического расширения воды. Ответ обосновать.



Решения и критерии оценивания

1. Нужно растянуть проводники и измерить сопротивление между крайними точками. Эквивалентная схема полученной цепи будет такой, как это показано на рисунке



Причем длины каждой пары параллельно расположенных проводников равны полудлине каждого замкнутого проводника. Поэтому сопротивление такой пары проводников равно $R_i / 4$, где R_i - сопротивление каждого кольцевого проводника. Поэтому сопротивление r всей цепи при условии растяжения всех проводников и измерения сопротивления между ее крайними точками равно

$$r = \frac{R_1}{4} + \frac{R_2}{4} + \frac{R_3}{4} + \frac{R_4}{4} + \frac{R_5}{4} = \frac{1}{4}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) = \frac{R}{4}$$

Значит сопротивление провода, из которого изготовлены проводники, равно учетверенному измеренному сопротивлению. А поскольку $R = \rho l / S$, где ρ - удельное сопротивление материала провода, l - его длина, S - площадь поперечного сечения, то удельное сопротивление материала провода равно

$$\rho = \frac{4rS}{l}$$

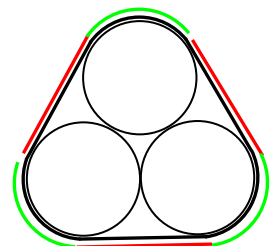
где r - результат измерения сопротивления всей цепи при условии растяжения всех проводников и измерения сопротивления между ее крайними точками.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – растяжение цепи и измерение сопротивления между ее крайними точками - 1 балл
2. Правильная эквивалентная схема цепи – 1 балл
3. Правильная связь сопротивление растянутой цепи между ее крайними точками и сопротивления всего провода – 1 балл
4. Использование правильного выражения для сопротивления провода через удельное сопротивление, длину и площадь поперечного сечения – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Найдем удлинение кольца. Его длина складывается из трех участков длиной $2R$ между трубами (показаны красным на рисунке), и трех участков, касающихся труб (зеленый). Поскольку последние опираются на угол, составляющий третью часть полного угла, то длина их всех равна $2\pi R$. Поэтому длина растянутого шнура есть



$$6R + 2\pi R$$

Поскольку длина кольца в недеформированном состоянии равна $7R$, его удлинение составляет

$$\Delta l = (2\pi - 1)R$$

И потому сила его натяжения есть

$$F = (2\pi - 1)kR$$

А так как силы взаимодействия труб N направлены точно так же, как и силы натяжения кольца, то они равны силе натяжения кольца и по величине

$$N = (2\pi - 1)kR \approx 5,28kR$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная геометрия сил – сила взаимодействия труб равна силе натяжения кольца - 1 балл
 2. Правильный способ вычисления длины натянутого кольца – разбиение кольца на прямые участки и участки, охватывающие трубы – 1 балл
 3. Правильное нахождение длины натянутого кольца – 1 балл
 4. Правильное использование закона Гука – 1 балл
 5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Рассмотрим массу m смеси бензина и биоэтанола. Для масс бензина m_B и биоэтанола $m_{\text{Э}}$ в смеси выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} m &= m_B + m_{\text{Э}} \\ \frac{m_B q_B}{m_{\text{Э}} q_{\text{Э}}} &= 3 \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим для масс бензина и биоэтанола в смеси

$$m_B = \frac{3q_{\text{Э}}m}{3q_{\text{Э}} + q_B}, \quad m_{\text{Э}} = \frac{q_B m}{3q_{\text{Э}} + q_B}.$$

Отсюда легко найти массовые доли бензина и биоэтанола в смеси

$$v_B = \frac{m_B}{m} = \frac{3q_{\text{Э}}}{3q_{\text{Э}} + q_B} = 0,66 \quad v_{\text{Э}} = \frac{m_{\text{Э}}}{m} = \frac{q_B}{3q_{\text{Э}} + q_B} = 0,34$$

и удельную теплоту сгорания смеси

$$q = \frac{m_B q_B + m_{\text{Э}} q_{\text{Э}}}{m} = \frac{4q_B q_{\text{Э}}}{3q_{\text{Э}} + q_B} = 39,0 \text{ МДж/кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – составление системы уравнений для масс бензина и этанола в смеси - 1 балл
 2. Правильная система уравнений для масс бензина и этанола в смеси – 1 балл
 3. Правильно найдены массовые доли бензина и этанола в смеси (формула и число) – 1 балл
 4. Правильная формула для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл
 5. Правильное число для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. После порчи часов угловая скорость часовой стрелки стала равна

$$\omega_c = \frac{2\pi}{4} \text{ (рад/час)}$$

Поэтому за 24 часа (за сутки) часовая стрелка сделает 6 целых оборотов. Минутная стрелка (идущая с «правильной» угловой скоростью) сделает за сутки 24 целых оборота. Поэтому и в начале, и в конце суток положения стрелок совпадают. Очевидно, на каждом обороте минутной стрелки относительно часовой минутная стрелка будет дважды перпендикулярна часовой. Поэтому нужно посчитать количество оборотов минутной стрелки относительно часовой.

Очевидно, что количество оборотов минутной стрелки относительно часовой равно количеству встреч этих стрелок за сутки (кроме той встречи, с которой сутки начались). А поскольку часовая стрелка движется навстречу минутной и совершает за сутки 6 оборотов, а минутная – 24, то за сутки произойдет 30 встреч минутной и часовой стрелок. Поэтому за сутки на таких часах минутная стрелка будет перпендикулярна часовой стрелке 60 раз.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. **Правильный вывод, что за каждый оборот минутной стрелки относительно часовой стрелки бывают перпендикулярны 2 раза – 1 балл**
2. **Правильная угловая скорость часовой стрелки (или количество оборотов, которая эта стрелка совершит за сутки) - 1 балл**
3. **Правильно найдено (и обосновано) количество оборотов минутной стрелки относительно часовой – 2 балла (при отсутствии разумного обоснования – 1 балл)**
4. **Правильный ответ – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Конусы будут двигаться так, что их центр тяжести (который находится посередине общего основания конусов) будет опускаться. При этом перемещение точки касания конусов и дощечек вверх по дощечкам может сопровождаться опусканием центра тяжести конусов. Поэтому в зависимости от углов раствора конусов, подъема дощечек и раствора дощечек может случиться, что центр тяжести конусов опускается при движении конусов по дощечкам вверх, а может случиться, что центр тяжести опускается при движении конусов по дощечкам вверх. Вторая ситуация создает иллюзию «неправильного» движения.

Ясно, что границей между этими случаями является сохранение высоты расположения центра тяжести конусов на одной и той же высоте по отношению к земле и при движении конусов по дощечкам вверх, и придвижении конусов по дощечкам вниз. Найдем соотношение углов, при котором реализуется эта ситуация.

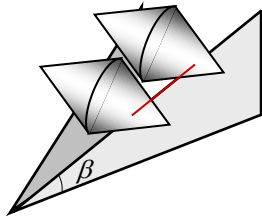
Пусть точка касания конусов и дощечек переместилась вверх на расстояние x по дощечкам (см. рисунок; красный отрезок). Тогда точка касания конусов и дощечек поднялась по отношению к земле на высоту (синий отрезок)

$$\Delta h_1 = x \sin \beta$$

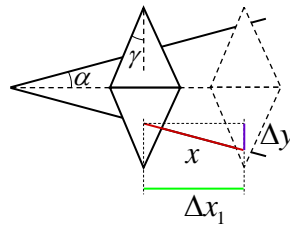
где β - угол подъема дощечек. С другой стороны, перемещение точки касания на расстояние x по дощечкам приводит к перемещению оси конусов на расстояние

$$\Delta x_1 = x \cos \beta \cos \alpha$$

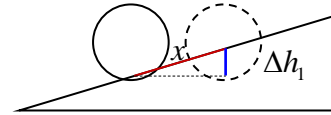
(зеленый отрезок) где α - угол полураствора дощечек.



вид в проекции



вид сверху



вид сбоку

С третьей стороны, перемещение оси конусов на расстояние Δx_1 приводит к перемещению точки касания конусов и дощечек на расстояние

$$\Delta y = \Delta x_1 \operatorname{tg} \alpha = x \cos \beta \sin \alpha$$

по оси конусов, что приводит к опусканию точки касания на величину

$$\Delta z = \Delta y \operatorname{tg} \gamma = x \cos \beta \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

Таким образом, центр тяжести конусов останется на той же высоте над землей, если выполнено условие

$$\Delta h_1 = \Delta z \quad \Rightarrow \quad x \sin \beta = x \cos \beta \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

При выполнении этого равенства центр тяжести конусов остается на одной и той же высоте при их перемещении по дощечкам, и, следовательно, конусы находятся на дощечках в положении безразличного равновесия – любое их перемещение по дощечкам не приводит к повышению или понижению центра тяжести конусов по отношению к земле. Следовательно, конусы будут находиться в равновесии на дощечках в любом положении.

Итак, если

$$\operatorname{tg} \beta < \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

то перемещение конусов по дощечкам вверх приводит к понижению их центра тяжести по отношению к земле, поэтому в этом случае конусы и будут двигаться по дощечкам вверх. Если выполнено обратное неравенство

$$\operatorname{tg} \beta > \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

то перемещение конусов по дощечкам вверх приводит к подъему их центра тяжести, и конусы так двигаться не будут, а будут спускаться по дощечкам вниз.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Верная главная идея решения – при движении конусов по дощечкам вверх их центр тяжести может опускаться, подниматься или оставаться на той же высоте над землей. В последнем случае конусы будут находиться на дощечках в положении равновесия – 1 балл

2. Правильная идея нахождения соотношения углов, при котором конусы будут находиться в равновесии. Сравнение высоты подъема оси конусов с опусканием центра тяжести по отношению к оси - 1 балл

3. Правильное соотношение углов при равновесии – 2 балла

4. Правильные условия спуска и подъема конусов – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Найдем, как меняется давление воды в сосуде, имеющем форму перевернутого конуса, при ее нагревании. Во-первых, заметим, что учитывать изменение размеров сосуда при нагревании нам не нужно, поскольку в условии сказано, что коэффициент теплового расширения стекла (из которого сделан сосуд) много меньше коэффициента теплового расширения воды.

Чтобы понять, как меняется давление воды в сосуде при нагревании, рассмотрим сначала более простую задачу, когда сосуд, в котором нагревают воду, цилиндрический. Пусть объем воды при нагревании увеличился в n раз: $V \rightarrow V' = nV$. Тогда с учетом того, что площадь сечения сосуда не меняется (сосуд не расширяется при нагревании), это приводит к увеличению высоты столба воды тоже в n раз:

$$V = Sh, \quad V' = nV = Sh', \quad \Rightarrow \quad h' = nh.$$

(S - площадь сечения сосуда, h и h' - старая и новая высота столбы воды). С другой стороны, увеличение объема воды в n раз приводит к уменьшению ее плотности в n раз:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{nV} = \frac{\rho}{n}$$

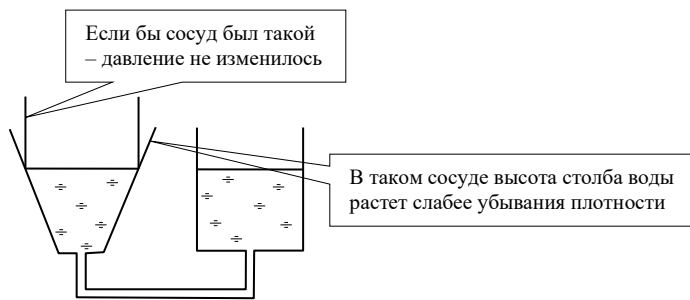
где m - масса воды в нагреваемом колене сосуда, ρ и ρ' - старая и новая плотности воды. Отсюда заключаем, что гидростатическое давление воды в цилиндрическом сосуде при ее нагревании не меняется (при условии неизменности самого сосуда):

$$p = \rho gh, \quad p' = \rho' gh' = \frac{\rho}{n} gn h = \rho gh = p$$

где p и p' - старое и новое давления столба воды в нагреваемом сосуде. Таким образом, если бы нагреваемый сосуд был цилиндрическим, давление воды в нем при нагревании не изменилось бы, поскольку уменьшение плотности воды при тепловом расширении, точно компенсируется увеличением уровня воды. Следовательно, уровень воды во втором колене не изменился бы, если бы нагреваемый сосуд был цилиндрическим.

Отсюда легко сообразить, что в сосуде, представляющем собой перевернутый конус, давление воды уменьшается при нагревании. Действительно, при нагревании воды ее плотность уменьшается так же, как и в цилиндрическом сосуде, поскольку уменьшение плотности определяется только увеличением объема воды. А вот рост высоты столба воды в расширяющемся сосуде будет, очевидно, меньшим, чем в цилиндрическом. Действительно, из-за расширения сосуда, вода

поднимается в нем меньше, чем в сосуде, имеющем форму перевернутого конуса (см. рисунок). Поэтому в том сосуде, где жидкость не нагревается, ее уровень будет опускаться.



Если бы сосуд был сужающимся кверху, например, в форме неперевернутого конуса, то ситуация была бы обратной. При нагревании воды в коническом сосуде, ее уровень рос бы быстрее, чем убывала бы плотность. Поэтому давление воды увеличивалось бы, и уровень воды в другом колене повысился.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Вывод (явный), что изменение размеров сосуда при нагревании мало и его не надо учитывать – 1 балл**
- 2. Рассмотрение нагревания воды в цилиндрическом сосуде - 1 балл**
- 3. Вывод об одинаковом увеличении высоты и уменьшении плотности воды в цилиндрическом сосуде – 1 балл**
- 4. Вывод о меньшем росте высоты, чем уменьшении плотности в расширяющемся кверху сосуде – 1 балла**
- 5. Правильный ответ – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.