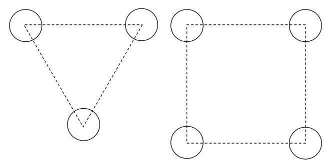
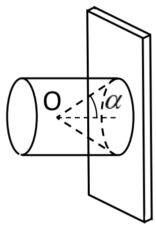
Решения и критерии оценивания задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников 2020-2021 учебного года

9 класс

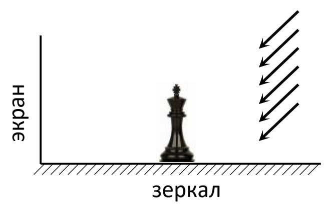


1. В атомных реакторах на быстрых нейтронах выгодно обеспечить максимальную объемную долю топлива. Топливо загружается в реактор в виде вертикальных цилиндрических стержней (см. рисунок, вид сверху; показано сечение одной ячейки активной зоны реактора – или треугольной (слева) или квадратной (справа), круги – сечения топливных стержней). Какая из компоновок реактора – с ячейкой в виде квадрата или равностороннего треугольника - лучше удовлетворяет этому требованию? Найдите объемную долю топлива в реакторах с треугольной или квадратной ячейкой, если диаметр топливных стержней d, сторона ячейки (и треугольной, и квадратной) a.

2. В лабораторный стакан (допускающий кипячение воды) налили воду из резервуара и включили нагреватель. Через время $t_1 = 5$ минут вода закипела. Тогда в стакан из резервуара добавили еще ложку воды, и температура воды в стакане уменьшилась на $\Delta T = 5°$, но через $t_2 = 20$ секунд вода в стакане закипела снова. Найти температуру воды в резервуаре. Теплопотерями пренебречь. Температура кипения воды $T_к = 100°$ С.

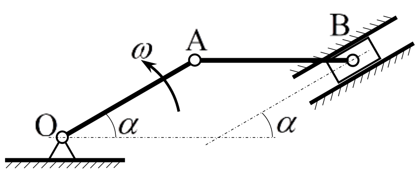


3. В передней части кумулятивного противотанкового снаряда во взрывчатом веществе сделана коническая выемка (см. рисунок). Детонация снаряда начинается из вершины выемки (точки О) в тот момент, когда снаряд коснется брони танка. После этого по взрывчатому веществу со скоростью $5v$ распространяется волна детонации (вовлечение в процесс взрыва новых участков взрывчатого вещества), а продукты взрыва разлетаются по всем направлениям со скоростью v. Максимальное поражение брони будет достигаться тогда, когда продукты взрыва от всех участков выемки достигнут брони танка одновременно. Каким для этого должен быть угол α при вершине выемки?



4. На горизонтальном зеркале недалеко от экрана стоит шахматная фигура. Фигура освещается параллельным потоком лучей, падающих на нее наклонно (см. рисунок). Будет ли видна на экране тень фигуры? И если да, то какой она будет – увеличенной, уменьшенной, прямой, перевернутой? Ответ сопроводить построением хода лучей.

5. Имеется три стакана с водой массой m, $3m$ и $7m$ с разными температурами. Когда ложку воды из первого стакана перелили во второй, температура воды в нем увеличилась на величину Δt. Затем такую же ложку воды из второго стакана перелили в третий, и температура воды в нем уменьшилась на величину $\Delta t / 3$. После этого такую же ложку воды из третьего стакана перелили в первый. На сколько изменится температура воды в первом стакане? Потерь тепла в окружающее пространство не происходит. Теплоемкостью стаканов пренебречь.



6. Кривошипно-шатунный механизм состоит из двух стержней ОА (кривошип) и АВ (шатун), которые движутся следующим образом. Кривошип вращается с угловой скоростью ω вокруг точки О, шатун в точке А шарнирно связан с кривошипом, в точке В – с ползуном, который движется в направляющих, образующих угол α с горизонтом. Найти угловую скорость шатуна AB в тот момент времени, когда угол между кривошипом и горизонтом равен $\alpha = 30^\circ$ (см. рисунок). AB=OA.

Решения

1. Для ответа на вопрос задачи нужно найти, какой объем в элементарной ячейке занимает топливо. Поскольку доля топлива одинакова во всех ячейках, она будет такой же и для всего реактора. Кроме того, и ячейка и топливные стержни имеют цилиндрическую форму с одинаковой высотой, поэтому для сравнения объемов нужно сравнить площади сечений ячейки с топливных стержней.

Площадь сечения треугольной ячейки со стороной a равна

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

В этой ячейке есть три сектора топливных стержней, опирающихся на угол $60°$, т.е. составляющих одну шестую площади поперечного сечения стержней каждый. Поэтому площадь сечения стержней, попадающая в одну треугольную ячейку, составляет

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi d^2$$

Поэтому объемная доля топлива S_1 / S в треугольной ячейке есть

$$\eta_{\Delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{d^2}{a^2}$$

Аналогично находим для реактора с квадратной ячейкой

$$S = a^2, \qquad S_1 = \pi d^2 \qquad \eta_{\square} = \pi \frac{d^2}{a^2}$$

Таким образом,

$$\frac{\eta_{\Delta}}{\eta_{\square}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}15 > 1$$

Следовательно, треугольная ячейка более заполнена топливом, чем квадратная.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – сравнить объемы ячейки и топлива в каждой ячейке с квадратной и треугольной планировкой активной зоны реактора – 0,5 балла.
2. Правильно найден объем ячейки (или площадь сечения, и понято, что в цилиндрической геометрии все определяется площадью сечения ячейки) – 0,5 балла.
3. Правильно найден объем (или площадь сечения) стержней в одной ячейке – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям.

2. Пусть температура воды в резервуаре T_0, масса воды, налитой первоначально в стакан M, масса ложки воды m, мощность нагревателя P. Тогда уравнения теплового баланса для нагревания первой порции воды, смешения кипящей воды и ложки воды из резервуара и нагревания смеси дают

$$\begin{aligned} &Pt = cM\left(T_к - T_0\right) \\ &cm\left(T_к - \Delta T - T_0\right) = cM\Delta T \\ &Pt_1 = c\left(M + m\right)\Delta T \end{aligned} \qquad (3)$$

где c - удельная теплоемкость воды. Деля первое и третье уравнение системы (3) друг на друга, получим

$$\frac{t}{t_1}=\frac{M}{(M+m)}\frac{(T_к-T_0)}{\Delta T}$$

откуда находим отношение масс первоначальной порции воды и ложки воды

$$\frac{m}{M}=\frac{t_1}{t}\frac{(T_к-T_0)}{\Delta T}-1$$

С другой стороны, это же отношение масс можно найти из второго уравнения системы (3)

$$\frac{m}{M}=\frac{\Delta T}{T_к-\Delta T-T_0}$$

Приравнивая эти соотношения, получим уравнение, в которое входит единственная неизвестная – температура воды в резервуаре T_0

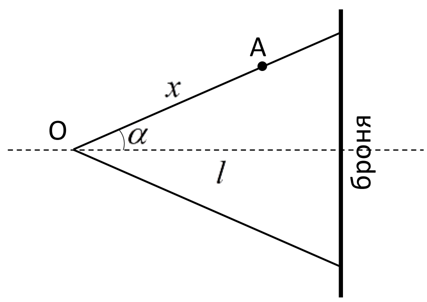
$$\frac{t_1}{t}\frac{(T_к-T_0)}{\Delta T}-1=\frac{\Delta T}{T_к-\Delta T-T_0}$$

Решая это уравнение, получим

$$T_0=T_к-\Delta T\left(1+\frac{t}{t_1}\right)=20^\circ\ \mathrm{C}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – сравнение количеств теплоты, необходимых на нагрев стакана воды от комнатной температуры до кипения, ложки воды от комнатной до промежуточной, и смеси от промежуточной температуры до кипения – 0,5 балла.
2. Правильное отношение масс воды в стакане и в ложке – 0,5 балла.
3. Правильное уравнение для температуры воды в резервуаре – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Чтобы продукты взрыва снаряда пришли от каждой точки выемки к броне танка одновременно, нужно, чтобы сумма времен распространения волны детонации по поверхности выемки от ее вершины (где начинается детонация) до какой-то точки выемки и времени разлета продуктов от этой точки до брони (вдоль оси выемки) было одинаковым для всех точек выемки. Реализуем это условие.



Пусть высота выемки равна l, угол при ее вершине 2α (см. рисунок; отмечен угол, равный половине угла при вершине выемки). Рассмотрим точку выемки А, лежащую на расстоянии x от ее вершины. Волна детонации дойдет от точки О (где детонация начинается) до точки А за время $x/5v$, а продукты взрыва в точке А долетят до брони за время $(l-x\cos\alpha)/v$. Поэтому продукты взрыва в точке А достигнут брони через время

$$t=\frac{x}{5v}+\frac{l-x\cos\alpha}{v}=\frac{5l+x(1-5\cos\alpha)}{5v} \qquad (*)$$

после начала детонации в точке О. Чтобы продукты взрыва достигли брони танка одновременно, время (*) не должно зависеть от x. А это возможно, если

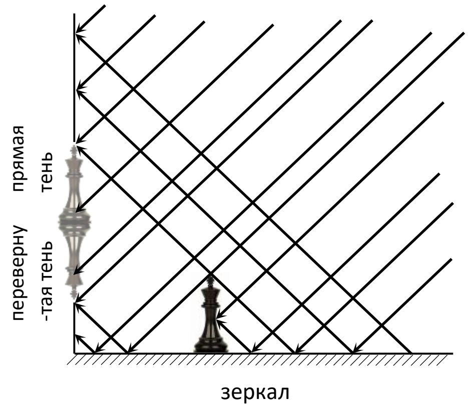
$$1-5\cos\alpha=0$$

или

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{5}\right)=78^\circ$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование формул «расстояние-время-скорость» – 0,5 балла.
2. Правильно вычислено время прихода продуктов взрыва к броне от разных участков выемки – 0,5 балла.
3. Уравнение для угла расхождения выемки, при котором продукты от разных точек приходят к броне одновременно – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. На экране будут две тени от шахматной фигуры – прямая и перевернутая. Действительно, в каждую точку экрана будут падать лучи от источника и лучи, отраженные от зеркала. И будут две области, куда падают только лучи от источника. Это лучи, которые после отражения от зеркала будут задержаны фигурой и лучи от источника, которые не попадут на зеркало, поскольку будут задержаны фигурой. Первые формируют прямую тень, вторые – перевернутую (см. рисунок). И поскольку все падающие лучи параллельны друг другу, то и отраженные от плоского зеркала лучи параллельны друг другу. Поэтому размеры областей тени (и прямой и перевернутой) будут равны размерам фигуры.



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – на каждую точку экрана падают лучи непосредственно от источника и отраженные от зеркала, за исключением тех, которые задерживаются фигурой. Вывод (из рисунка в задаче), что фигура может задержать только отраженные лучи – 0,5 балла.
2. Найдены две тени – фигура задерживает лучи, идущие непосредственно от источника, и лучи, отраженные от зеркала – 0,5 балла.
3. Правильные построения – 0,5 балла
4. Правильные выводы относительно размеров теней и относительно того, что одна тень прямая, одна перевернутая – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. После трех переливаний мы снова имеем три стакана воды с массой m, $3m$ и $7m$. При этом температура воды во втором стакане стала больше на величину Δt, в третьем – меньше на величину $\Delta t/3$. Следовательно, второй стакан получил количество теплоты

$$Q_2=c3m\Delta t\,,$$

третий – получил количество теплоты

$$Q_3=-c7m\Delta t/3,$$

где c - удельная теплоемкость воды. Поскольку потерь тепла в окружающее пространство не происходит, сумма количеств теплоты, полученных всеми тремя стаканами, равна нулю

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = cm\Delta t_1 + c3m\Delta t - c7m\Delta t/3 = 0 \qquad (*)$$

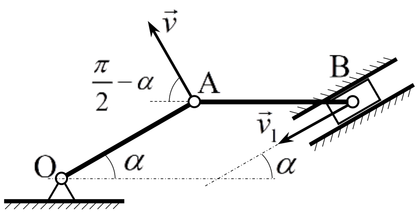
где Δt_1 - изменение температуры воды в первом стакане. Из уравнения (*) находим изменение температуры воды в первом стакане

$$\Delta t_1 = -\frac{2}{3}\Delta t$$

Следовательно, температура воды в первом стакане уменьшилась на величину $2\Delta t/3$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использование правильных формул для количества полученной теплоты – 0,5 балла.
2. Правильная идея решения: при тех же массах воды в стаканах, как и в начальном состоянии, посчитать количества теплоты, полученные каждым стаканом, и приравнять сумму этих количеств нулю – 0,5 балла..
3. Правильное уравнение для нахождения – 0,5 балла
4. Правильный ответ для изменения температуры воды в первом стакане (с учетом знака) – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Поскольку кривошип ОА вращается вокруг точки О, скорость точки А направлена перпендикулярно кривошипу и равна по величине $v = \omega l$, где l - длина кривошипа. Поэтому угол между вектором $\vec{v}$ и шатуном в рассматриваемый момент равен $\pi/2 - \alpha$. А поскольку вектор скорости точки В направлен вдоль направляющих, угол между скоростью второго конца шатуна и шатуном в рассматриваемый момент равен α. Поэтому из условия нерастяжимости шатуна имеем

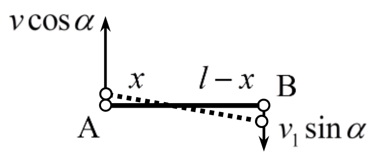


$$v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_1 \cos\alpha$$

где v_1 - скорость точки В. Отсюда

$$v_1 = v\,\mathrm{tg}\alpha$$

Таким образом шатун движется вдоль себя самого со скоростью $v\sin\alpha$. А в перпендикулярном шатуну направлении скорости его концов равны: точки А - $v\cos\alpha$ и направлена вертикально вверх, точки В - $v_1 \sin\alpha = v\sin^2\alpha/\cos\alpha$ и направлена вертикально вниз (см. рисунок). Это приводит к тому, что шатун поворачивается (см. рисунок; положение повернутого шатуна показано пунктиром), причем в покое остается такая его точка, что



$$\frac{v\cos\alpha}{x} = \frac{v_1 \sin\alpha}{l - x}$$

где x - расстояние от неподвижной точки шатуна до точки А. Отсюда находим

$$x = \frac{v\cos\alpha}{v\cos\alpha + v_1\sin\alpha} = l\cos^2\alpha$$

Поэтому угловая скорость шатуна равна

$$\omega_1 = \frac{v\cos\alpha}{x} = \frac{\omega}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}\omega$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильные формулы для нахождения соотношений между скоростями концов жесткого стержня – 0,5 балла.
2. Правильно найдена скорость точки B – 0,5 балла
3. Правильная идея нахождения угловой скорости шатуна разложение скоростей концов на поперечную и продольную составляющие и нахождение угловой скорости через поперечные составляющие – 0,5 балла.
4. Правильный ответ для угловой скорости шатуна – 0,5 балла.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Округление оценки до целой не предусмотрено (итоговая оценка может быть как целой, так и «полуцелой»)