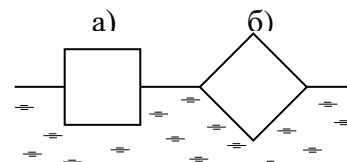


**Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура
Инженерной олимпиады школьников
10 класс, 2022-2023 учебный год**

1. При причаливании танкера к речному причалу произошло небольшое столкновение, и часть нефти вылилась в реку. Была проведена очистка акватории реки, во время которой собрали объем $V = 2000$ л загрязненной жидкости, которая имела массу $m = 1,725$ т. Какую массу нефти содержала данная жидкость? Плотность нефти $\rho = 800$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

2. При проектировании кораблей необходимо учитывать не только грузоподъемность – сколько груза корабль может безопасно взять на борт, но и его устойчивость к опрокидыванию при крене (в кораблестроительной практике используется термин «устойчивость»). Рас-



смотрим модель корабля – брусок квадратного сечения с плотностью, равной половине плотности воды, плавающий в воде. Оба положения «корабля», показанные на рисунке, являются положениями равновесия. Какое из них – а или б - является устойчивым и почему? Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).

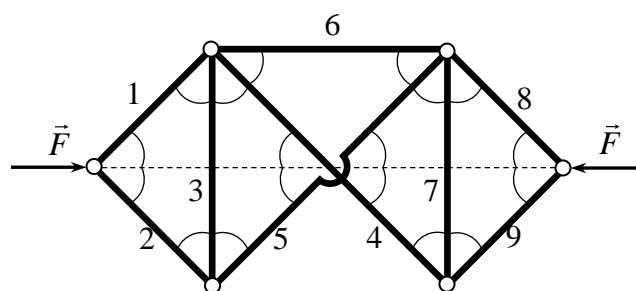
3. В ясную солнечную погоду в небо поднимается вертолет. Оказалось, что вертолет отбрасывает тень на землю, если высота его подъема не превышает $h = 1$ км. При больших высотах тень от вертолета пропадает. Считая, что угловой размер Солнца составляет $\Delta\alpha = 0,5^\circ$, оцените размеры вертолета. Считайте, что Солнце находится в зените (прямо над головой).

4. На горизонтальную ленту транспортера, которая движется со скоростью $v = 2$ м/с, из накопителя станка падают готовые детали. Лента переносит детали до конца транспортера, где они сваливаются в ящик - приемник деталей. Расстояние между соседними деталями $d = 8$ см. Из-за отключения электричества лента практически мгновенно останавливается. Сколько деталей свалится в ящик, если коэффициент трения между деталями и лентой равен $\mu = 0,2$? Считать, что $g = 10$ м/с².

5. Балластный резервуар объемом $V = 5000$ л подводной лодки заполнен водой. Для сброса балласта в резервуар с помощью насоса подается воздух и вода через трубу сечением 100 см² вытекает наружу. Оценить, какой должна быть мощность насоса, чтобы лодка на глубине $h = 100$ м могла полностью освободиться от балластной воды за время $t = 30$ с? Считать, что атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения

$g = 10$ м/с², плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

6. Девять жестких невесомых стержней связаны невесомыми шарнирами. На два крайних шарнира действуют одинаковые по величине силы \vec{F} , направленные противоположно вдоль одной пря-



мой. Все углы, отмеченные на рисунке дугами, равны 45° . Определить силы натяжения стержней F_1, F_2, \dots, F_9 . Какие из стержней будут растянуты, какие сжаты? Считать, что стержни 4 и 5 посередине системы не касаются друг друга и никак друг на друга не влияют (на рисунке это показано разрывом одного из стержней).

Решения и критерии оценивания

1. Из данных условия находим среднюю плотность загрязненной жидкости

$$\rho_{cp} = \frac{m}{V}$$

С другой стороны, среднюю плотность смеси можно найти через плотности компонент. Пусть масса воды в загрязненной жидкости m_1 , масса нефти - m_2 . Тогда для средней плотности имеем

$$\rho_{cp} = \frac{m}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}}$$

где m_1 и m_2 - массы воды и нефти в смеси. Поскольку $m = m_1 + m_2$, эту формулу можно продолжить так

$$\rho_{cp} = \frac{m}{\frac{m - m_2}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}}$$

Поэтому

$$\frac{m - m_2}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = V$$

Отсюда находим

$$m_2 = \frac{(V\rho_1 - m)\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 1100 \text{ кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное использование формулы, связывающей массу, плотность и объем - 0,5 балла.
2. Правильное использование средней плотности – 0,5 балла.
3. Правильное уравнение, из которого можно найти массу нефти в загрязненной жидкости – 0,5 балла
4. Правильный ответ – и формула и число – 0,5 балла.

2. Оба положения модели корабля, данные в условии, являются положениями равновесия – это значит, что сумма сил и сумма моментов сил, действующих на модели равна нулю. Поэтому в этом положении потенциальная энергия модели в поле силы тяжести достигает или максимума или минимума среди всех соседних положений. Однако в положении устойчивого равновесия этот экстремум потенциальной энергии должен быть минимумом. Найдем, какое из двух положений, данных в условии, отвечает минимуму потенциальной энергии.

Потенциальная энергия плавающего тела складывается из потенциальной энергии самого тела и потенциальной энергии воды, которая поднимается благодаря ее вытеснению телом. Потенциальная энергия тела в обоих случаях одинакова, поскольку его центр тяжести находится на уровне воды. Потенциальную энергию вытесненной воды можно посчитать так. До вытеснения – это потенциальная энергия воды в объеме погруженной в воду части тела, после вытеснения – это

потенциальная энергия этой воды на поверхности воды в сосуде. Поэтому потенциальная энергия воды в объеме погруженной в воду части тела равна (относительно уровня воды в сосуде)

$$\Pi = mgh$$

где m - масса вытесненной воды, g - ускорение свободного падения, h - расстояние от центра тяжести вытесненной воды до поверхности воды в сосуде. Масса вытесненной воды одинакова и для первой, и для второй модели, а вот расстояние от поверхности до центра тяжести – разное. В первом случае (случае а)) оно равно $h_a) = a/4 = 0,25a$ (где a - ребро поперечного сечения модели), во втором случае (в случае б)) – $h_b) = \sqrt{2}a/6 = 0,236a$ (эта формула связана с тем, что сечение погруженной части модели – треугольник, а его центр тяжести находится в точке пересечения медиан). Поскольку

$$h_b) < h_a)$$

потенциальная энергия плавающего тела в случае а) больше потенциальной энергии тела в случае б). А поскольку «между ними» нет других положений равновесия, то потенциальная энергия плавающего тела в положении а) достигает максимума, в положении б) – минимума. Поэтому положение а) – неустойчивое, положение б) – устойчивое равновесие.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – устойчивому положению равновесия отвечает минимум потенциальной энергии системы тело-вода - 0,5 балла.
2. Правильное нахождение потенциальной энергии поднятой воды – 0,5 балла.
3. Правильное сравнение центров тяжести вытесненной воды в первом и втором случае – 0,5 балла
4. Правильный вывод об устойчивости положения кубика на рисунке (б) – 0,5 балла.

3. Будем для оценки считать, что вертолет имеет форму шара. Очевидно, вертолет перестает отбрасывать тень на землю, когда его угловой размер становится равным угловому размеру Солнца (см. рисунок). В этом положении тень от вертолета становится точкой. При большей высоте подъема лучи, идущие от разных точек солнечного диска, будут освещать всю землю под вертолетом, и вертолет не будет отбрасывать тень. Поэтому

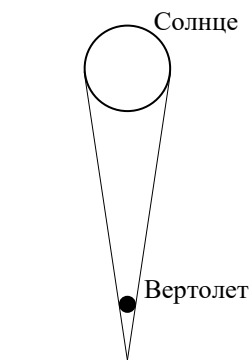
$$\frac{d}{h} = \Delta\alpha \quad \Rightarrow \quad d = h\Delta\alpha$$

где d - размер вертолета, причем угол должен быть задан в радианах. Для угла, заданного в градусах, имеем для размера вертолета

$$r = \frac{\pi}{180} \Delta\alpha h \approx 9 \text{ м}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – тень вертолета на земле пропадает, когда его угловой размер становится равным угловому размеру Солнца – 0,5 балла.
2. Правильные формулы для размера вертолета через его угловой размер – 0,5 балла.



3. Правильный пересчет градусов в радианы или использование тригонометрических формул – 0,5 балла

4. Правильная оценка размера вертолета (с точностью до множителя 2) – 0,5 балла.

4. Сразу после остановки ленты детали имеют скорость $v = 2$ м/с относительно ленты, и будут останавливаться благодаря трению. В ящик свалятся те детали, тормозной путь которых больше, чем расстояние от них до ящика в момент остановки транспортера. Тормозной путь S тела, движущегося по шероховатой горизонтальной поверхности, можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgS$$

где m - масса тела, v - его начальная скорость, μ - коэффициент трения между телом и поверхностью. Отсюда находим

$$S = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Поэтому в ящик свалятся

$$N = \left[\frac{S}{d} \right] = \left[\frac{v^2}{2\mu gd} \right] = 12 \text{ деталей,}$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – найти тормозной путь деталей и сравнить его с расстоянием между деталями – 0,5 балла.

2. Правильные формулы для тормозного пути – 0,5 балла.

3. Правильная формула для количества деталей, упавших в ящик – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла.

5. Чтобы удалить балласт (воду) из балластного резервуара, насос должен совершить работу против сил гидростатического давления и сообщить кинетическую энергию удаляемой воде, причем эта энергия может оказаться значительной, поскольку воду нужно удалять за достаточно короткое время. Поэтому работу насоса можно записать как

$$A = pV + \frac{mv^2}{2}$$

где p - давление жидкости на глубине h ($p = p_0 + \rho gh$), V - объем резервуара, m - масса воды в резервуаре ($m = \rho V$), v - ее скорость ($v = V/tS$). Поэтому работа насоса равна

$$A = (p_0 + \rho gh)V + \frac{\rho V^3}{2t^2 S^2}$$

Отсюда находим мощность N , развиваемую насосом

$$N = \frac{A}{t} = \frac{(p_0 + \rho gh)V}{t} + \frac{\rho V^3}{2t^3 S^2} = 206 \text{ кВт}$$

Вклад второго слагаемого составляет около 10%.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная идея решения – вычисление работы, которую необходимо совершить для удаления воды из резервуара за данное время – 0,5 балла.
2. Правильное вычисление работы против сил гидростатического давления – 0,5 балла.
3. Правильное вычисление работы, которую нужно совершить для сообщения жидкости кинетической энергии – 0,5 балла
4. Правильный ответ для мощности насоса – 0,5 балла.

6. Докажем, что сила натяжения стержня 6 равна нулю. Действительно, пусть эта сила не равна нулю. Тогда условие равновесия узлов I и II (см. рисунок) дают

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_4 + \vec{F}_3 + \vec{F}_6 &= 0 && \text{для узла I} \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 &= 0 && \text{для узла II} \end{aligned}$$

(на рисунке принято определенные направления сил натяжения стержней; доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 от этих направлений не зависит). Благодаря симметрии конструкции относительно «право-лево» силы натяжения стержней 4 и 5 одинаковы. Поэтому условия равновесия узлов I и II в проекциях на оси перпендикулярные стержням 1 и 2 соответственно будут одинаковы за исключением силы натяжения стержня 6, которая, таким образом, должна быть равна нулю

$$\vec{F}_6 = 0$$

Это значит, что стержень 6 можно удалить из конструкции, а для нее справедливо и условие симметрии «верх-низ». То есть

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9; \quad F_4 = F_5; \quad F_3 = F_7$$

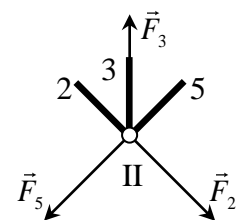
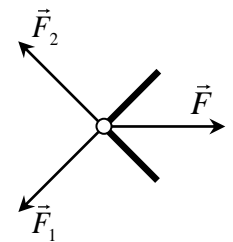
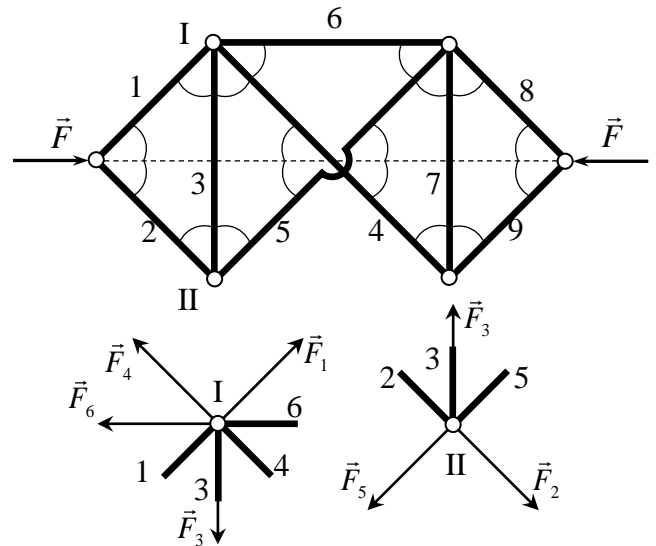
Теперь из условия равновесия самого левого узла (см. рисунок) заключаем, что стержни 1 и 2 (и, следовательно, 8 и 9) будут сжаты, а силы их натяжения равны

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9 = \frac{F}{2 \cos 45^\circ} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Поэтому из условия равновесия верхних или нижних узлов заключаем, что стержни 4 и 5 тоже будут сжаты, а стержни 3 и 7 растянуты. Поэтому из условия равновесия, например, узла II (см. рисунок)

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = 0$$

в проекциях на горизонтальную ось получаем, что $F_2 = F_5$, и, следовательно,



$$F_4 = F_5 = \frac{F}{\sqrt{2}}.$$

А из условия равновесия в проекциях на вертикальную ось

$$F_3 = 2F_2 \cos 45^\circ$$

находим

$$F_3 = F_7 = F$$

Итак:

стержни 1, 2, 4, 5, 8, 9 – сжаты, $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = \frac{F}{\sqrt{2}}$

стержни 3 и 7 - растянуты, $F_3 = F_7 = F$

стержень 6 не нагружен, $F_6 = 0$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 – 0,5 балла.**
- 2. Доказательство равенства сил натяжения стержней 1, 2, 4, 5, 8 и 9, а также сил натяжения стержней 3 и 7 – 0,5 балла.**
- 3. Правильный ответ для сил натяжения 1, 2, 4, 5, 8 и 9 стержней – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ для сил натяжения 3 и 7 стержней – 0,5 балла.**

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.