

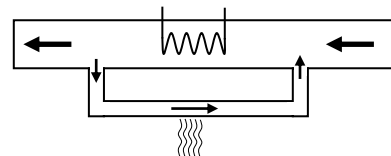
## Задания, решения и критерии оценивания работ заключительного тура

### Инженерной олимпиады школьников

9 класс, 2022-2023 учебный год

1. Если в пластине объема  $V$  просверлить несколько отверстий, масса пластины станет равной  $m_1$ . Если увеличить количество отверстий в 2 раза, масса пластины станет равной  $m_2$ . Найти плотность пластины. Все отверстия сквозные, имеют одинаковый диаметр и просверлены перпендикулярно плоскости пластины.

2. Тепловая станция нагревает воду для обеспечения небольшого микрорайона горячей водой. Для этого на станцию с помощью насосов подается вода, которая нагревается мощными нагревателями. Для обеспечения теплом самой станции часть потока нагретой воды проходит через помещения станции, охлаждается до первоначальной температуры и возвращается в поток воды, поступающий на станцию (см. рисунок). Известно, что если для обеспечения теплом самой станции используется десятая часть потока воды, то выходящая со станции вода нагревается на величину  $\Delta T$ . На какую величину  $\Delta T_1$  нагреется вода, выходящая со станции, если для обеспечения ее теплом будет использоваться восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем? Ответ обосновать.

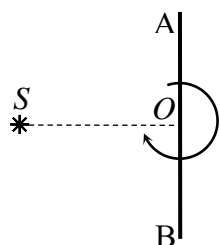
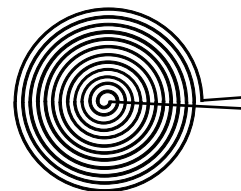


3. Лазеры для научно-инженерных исследований, нуждаются в очень точной установке расстояния между зеркалами оптического резонатора, которое не должно меняться при изменении температуры. Предлагается следующая конструкция температурного компенсатора расстояния между зеркалами. Зеркала ( $Z_1$  и  $Z_2$  на рисунке) крепятся к концам пластин из иридия длиной  $l = 10$  см.



Между этими пластинами вставляется пластина из никеля АВ (см. рисунок), концы которой соединены с правым концом нижней пластины, и с левым концом верхней. По чертежу объясните, как работает компенсатор расстояний. При какой длине пластины из никеля расстояние между зеркалами не будет меняться при тепловом расширении? Коэффициенты линейного теплового расширения иридия -  $\alpha_1 = 6,5 \cdot 10^{-6}$  1/град, никеля -  $\alpha_2 = 13,4 \cdot 10^{-6}$  1/град. **Указание.** При изменении температуры размеры твердых тел изменяются по закону:  $\Delta L = \alpha L \Delta t$ , где  $\Delta L$  - изменение длины тела,  $\alpha$  - коэффициент линейного теплового расширения,  $L$  - первоначальная длина,  $\Delta t$  - изменение температуры.

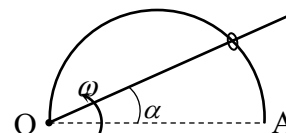
4. Нагревательный элемент нагревателя для детского питания представляет собой провод в тонкой изоляции, свернутый в плотную плоскую спираль радиуса  $R$  и большим числом витков  $N$ . Найти мощность, выделяемую в нагревателе при приложенном напряжении  $U$ . Удельное сопротивление материала проволоки  $\rho$ , площадь сечения проволоки  $S$ .



5. Для предотвращения столкновений судов с землей в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка. Неподвижный точечный источник света  $S$  находится на расстоянии  $d = 50$  см от зеркала АВ (см. рисунок). Зеркало вращается с угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку  $O$  на рисунке). Найти

скорость и ускорение изображения источника в зеркале.

6. Стержень вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через крайнюю точку сделанного из проволоки полукольца (точка  $O$  на рисунке). Стержень соединен с полукольцом колечком, которое может без трения скользить по стержню и полукольцу. Найти мгновенную угловую скорость колечка в тот момент времени, когда угол  $\alpha$  между стержнем и диаметром, замыкающим полукольцо, равен  $30^\circ$  (см. рисунок; диаметр,



равен  $30^\circ$  (см. рисунок; диаметр,

замыкающий полукольцо обозначен  $OA$ ). При каких углах  $\alpha$  больше угловая скорость колечка: при  $\alpha \rightarrow 0$  или при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  и почему?

## Решения и критерии оценивания

1. Пусть масса пластины (до просверливания отверстий) равна  $M$ , а масса вещества, удаленного в первом случае при просверливании отверстий, равна  $\Delta m$ . Тогда, учитывая, что масса удаленного вещества во втором случае вдвое больше массы, удаленной во втором случае, имеем

$$\begin{aligned}M &= m_1 + \Delta m \\M &= m_2 + 2\Delta m\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение системы на 2, и вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$M = 2m_1 - m_2$$

В результате для плотности пластины получаем

$$\rho = \frac{2m_1 - m_2}{V}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

1. Знание формулы, связывающей массу, плотность и объем - 1 балл
  2. Правильное уравнение для массы пластины после просверливания первой группы отверстий – 1 балл
  3. Понимание того, что во втором случае удалили вдвое большую массу – 1 балл
  4. Правильная система для массы пластины – 1 балл
  5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть на станцию за малый интервал времени  $\Delta t$  из магистрального водопровода поступает масса воды  $\Delta \mu$ ; такое же количество нагретой воды уходит со станции, поскольку вода не накапливается и не теряется на станции. За это время нагреватель выделяет количество теплоты

$$\Delta Q = P\Delta t$$

( $P$  - мощность нагревателей). Это тепло расходуется на нагревание воды, поступающей на станцию из магистрального водопровода, и воды, которая вернулась в поток после отдачи тепла самой станции. Поэтому если в систему нагрева станции за интервал времени  $\Delta t$  уходила масса воды  $\Delta m$ , то мимо нагревателя за время  $\Delta t$  проходила масса воды  $\Delta \mu + \Delta m$ , причем  $\Delta m$  составляет (в первом случае) десятую часть всего потока, проходящего мимо нагревателя, т.е.

$$\Delta m = \frac{1}{10}(\Delta \mu + \Delta m) \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{1}{9}\Delta \mu$$

Следовательно, уравнение теплового баланса в первом случае дает

$$c \frac{10}{9} \Delta \mu \Delta T = P\Delta t$$

Во втором случае для отопления самой станции используется восьмая часть потока, нагреваемого нагревателем, поэтому уравнение теплового баланса дает

$$c \frac{8}{7} \Delta \mu \Delta T_1 = P\Delta t$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{7} = \frac{36}{35}$$

Отсюда

$$\Delta T_1 = \frac{35}{36} \Delta T$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

1. Знание формулы для количества выделенной теплоты - 1 балл
  2. Правильное распределение потоков воды на станции – 1 балл
  3. Правильное уравнение теплового баланса в первом случае (когда для отопления станции используется десятая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
  4. Правильное уравнение теплового баланса во втором случае (когда для отопления станции используется восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
  5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Основная идея работы компенсатора тепловых расширений заключается в следующем. Очевидно, расстояние между зеркалами равно длине верхнего иридиевого стержня плюс расстояние от его левого конца до левого зеркала, которое в свою очередь равно длине нижнего иридиевого стержня минус длина никелевого стержня:

$$\Delta x = l + (l - x) = 2l - x$$

Здесь  $l$  - длина иридиевых стержней,  $x$  - длина никелевого стержня. Пусть при тепловом расширении длина иридиевого стержня увеличилась на  $\delta l$ , а длина никелевого – на  $\delta x$ . Тогда расстояние между зеркалами изменится на

$$\delta(\Delta x) = 2\delta l - \delta x$$

Из этой формулы следует, что если

$$2\delta l = \delta x, \quad (*)$$

то расстояние между зеркалами не меняется при тепловом расширении (или сжатии при охлаждении; оно отличается от расширения только знаком удлинений). Используя указание к условию задачи, получим из (\*) при нагреве на  $\Delta T$ :

$$2\alpha_1 l \Delta T = \alpha_2 x \Delta T$$

Откуда находим, что

$$x = \frac{2\alpha_1 l}{\alpha_2} \Delta T = 9,7 \text{ см}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

1. Умение использовать формулу для теплового расширения - 1 балл
2. Правильное объяснение принципа работы компенсатора тепловых расширений – 1 балл
3. Объяснение того, что тепловое расширение среднего стержня должно быть вдвое больше, удлинений верхнего и нижнего – 1 балл
4. Правильное уравнение «баланса длин» – 1 балл

## 5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Чтобы найти выделяемую нагревателем мощность, нужно знать сопротивление проволоки. А чтобы найти его - площадь сечения проволоки и длину спирали. Поскольку спираль свернута плотно, диаметр проволоки  $d$ , из которой изготовлена спираль, равен

$$d = \frac{R}{N}$$

а площадь сечения проволоки

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4N^2}$$

Найдем длину спирали. Так как витков по условию очень много, каждый виток мало отличается от окружности. Поэтому можно считать, что спираль состоит из  $N$  окружностей с радиусами

$$r_1 = \frac{R}{N}, r_2 = 2\frac{R}{N}, r_3 = 3\frac{R}{N}, \dots, r_N = N\frac{R}{N} = R$$

Поэтому ее длина есть

$$L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \dots + 2\pi r_N = \frac{2\pi R}{N}(1 + 2 + 3 + \dots + N)$$

Используя далее известную формулу для суммы  $N$  натуральных чисел, получим

$$L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \dots + 2\pi r_N = \frac{2\pi R}{N} \frac{N(N+1)}{2} = \pi R(N+1) \approx \pi RN$$

Поэтому сопротивление спирали равно

$$r = \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho \pi RN}{S}$$

Поскольку по условию витки намотаны плотно, площадь сечения проволоки можно связать с радиусом спирали и числом витков

$$S = \frac{\pi R^2}{4N^2} \Rightarrow r = \frac{\rho \pi RN 4N^2}{\pi R^2} = \frac{4\rho N^3}{R}$$

Теперь по закону Джоуля-Ленца находим мощность, выделяемую в спирали при приложении напряжения  $U$  (можно выразить эту величину через количество витков и радиус спирали, а можно через площадь сечения провода):

$$P = \frac{U^2}{r} = \frac{U^2 S}{\pi \rho RN} = \frac{U^2 R}{4\rho N^3}$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

1. Правильная идея решения – нахождение сопротивления спирали и использование закона Джоуля-Ленца – 1 балл
2. Знание связи сопротивления проволоки с ее геометрическими параметрами (длиной и площадью сечения) - 1 балл
3. Правильное использование закона Джоуля-Ленца – 1 балл

**4. Правильный принцип вычисления длины спирали (если используется длина среднего витка, должно быть обоснование выбора среднего) – 1 балла**

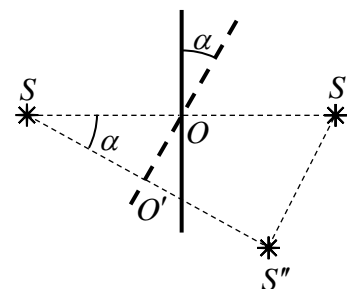
**5. Правильная формула для длины спирали, правильный ответ – 1 баллов**

**Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

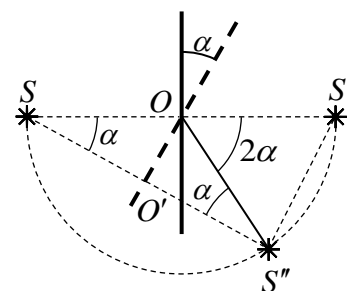
5. Определим характер движения изображения. Построение старого ( $S'$ ) и нового ( $S''$ ; после поворота зеркала на угол  $\alpha$ ) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол  $SS''S'$  - прямой. Действительно, треугольники  $SO'O$  и  $SS''S'$  подобны, так как у них общий угол  $\alpha$ , а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны с коэффициентом подобия 2 (поскольку расстояние от источника до изображения вдвое больше расстояния от источника до зеркала):

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол  $SO'O$  - прямой (изображение источника лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало), то прямым является и угол  $SS''S'$ . Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол  $SS''S'$  все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок  $SS'$  является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до оси вращения зеркала, т.е.  $R = SO = d$ . Эта окружность показана на рисунке справа.



Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол  $\alpha$ . Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность)  $OS = OS''$  и  $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$  (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому  $\angle S'OS'' = 2\alpha$ , и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega'$ , которая вдвое больше угловой скорости зеркала



$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому скорость изображения источника постоянна (т.к. не зависит от угла поворота зеркала  $\alpha$ ) и равна

$$v = \omega'R = 2\omega R = 2\omega d = 1 \text{ м/с.}$$

Поскольку изображение движется по окружности с постоянной по величине скоростью, его ускорение – центростремительное. Оно равно

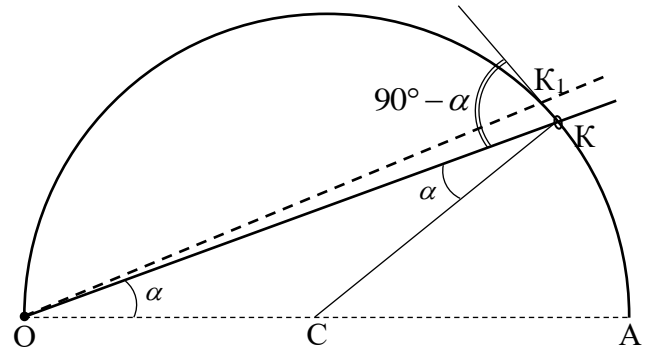
$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 R = 4\omega^2 d = 2 \text{ м/с}^2.$$

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

1. Правильное построение изображения точечного источника в зеркале – 1 балл
  2. Доказательство, что изображение движется по окружности - 1 балл
  3. Правильное нахождение угловой скорости изображения – 1 балл
  4. Правильная формула для центростремительного ускорения – 1 балл
  5. Правильный ответ для ускорения изображения – 1 балла
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Рассмотрим такое положение стержня, когда угол между ним и диаметром, замыкающим полукольцо, равен  $\alpha$ . И пусть после этого момента прошел малый интервал времени  $\Delta t$ . Тогда стержень повернется на малый угол  $\Delta\alpha = \omega\Delta t$  (см. рисунок; положение стержня спустя интервал времени  $\Delta t$  показано пунктиром). Найдем перемещение колечка по полукольцу.

Очевидно, угол между стержнем и полукольцом в рассматриваемом положении равен  $90^\circ - \alpha$  (этот угол отмечен на рисунке двумя дугами). Действительно, угол между стержнем и радиусом СК, проведенным к колечку, равен  $\alpha$  (так как треугольник ОСК – равнобедренный), а полукольцо перпендикулярно радиусу СК (см. рисунок). Поэтому перемещение  $\Delta x$  колечка, которое принадлежит одновременно и стержню и полукольцу, можно найти как (см. рисунок; отрезок  $\Delta x$  отмечен на рисунке как  $KK_1$ ):



$$\Delta x = \frac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r\omega\Delta t}{\cos\alpha} \quad (*)$$

где  $r$  - длина участка стержня от оси его вращения до колечка. Эту длину легко найти из равнобедренного треугольника ОСК или прямоугольного треугольника ОАК

$$r = 2R\cos\alpha \quad (**)$$

где  $R$  - радиус полукольца. В результате из формул (\*)-(\*\*) заключаем, что перемещение колечка по стержню не зависит от угла  $\alpha$  и составляет

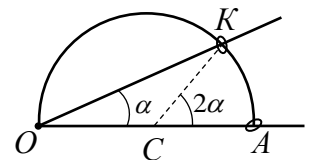
$$\Delta x = 2R\omega\Delta t$$

Поэтому линейная скорость колечка равна  $2R\omega$ , а угловая

$$\omega_k = 2\omega$$

Таким образом, из этой формулы следует, что угловая скорость колечка не зависит от угла между стержнем и диаметром ОА, замыкающим полукольцо, и равна удвоенной угловой скорости вращения стержня.

То обстоятельство, что угловая скорость колечка является постоянной, можно объяснить и по-другому. Найдем среднюю угловую скорость колечка за то время, пока стержень повернется на некоторый угол  $\alpha$  по отношению к диаметру ОА, замыкающему колечко. Очевид-



но, колечко повернется за это время на удвоенный угол, независимо от угла поворота стержня. Действительно, угол, опирающийся на дугу окружности и лежащий на самой окружности всегда вдвое меньше угла, лежащего в центре окружности и опирающегося на ту же дугу. Поэтому средняя угловая скорость колечка равна

$$\omega_{К,ср} = \frac{2\alpha}{t} = 2\omega$$

независимо от того, за какое время вычисляется эта скорость. А, следовательно, и мгновенная угловая скорость не зависит от  $\alpha$  и равна этой величине.

**Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):**

- 1. Правильная идея решения – рассмотреть малый интервал времени и найти перемещение колечка, которое движется одновременно по стержню и полукольцу – 1 балл**
  - 2. Правильное нахождение угла поворота стержня за малый интервал времени - 1 балл**
  - 3. Правильное нахождение перемещения колечка за малый интервал времени – 1 балл**
  - 4. Правильный ответ для угловой скорости колечка – 1 балла**
  - 5. Доказательство, того, что мгновенная угловая скорость колечка не меняется – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

**Оценка работы**

**Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.**