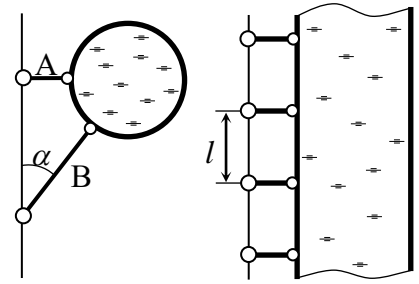
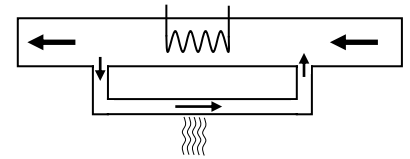


**Задания, решения и критерии оценки работ заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников
10 класс, 2022-2023 учебный год**

1. По трубопроводу диаметром d течет жидкость плотности ρ . Труба трубопровода расположена горизонтально и прикреплена к вертикальной стене с помощью двух типов стержней, прикрепленных шарнирно к стене и трубе (см. правый рисунок; вид сбоку). Углы между стержнями первого типа (обозначены на левом рисунке буквой А) и стеной – прямые, стержни второго типа (буква В) составляют со стеной углы $\alpha = 30^\circ$. Стержни располагаются через каждые l метров вдоль трубы (правый рисунок; вид сверху). Пренебрегая весом стержней и трубы по сравнению с весом жидкости, найти силы реакции стержней.

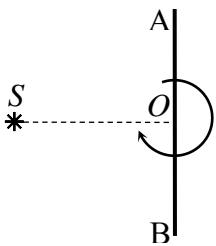


2. Тепловая станция нагревает воду для обеспечения небольшого микрорайона горячей водой. Для этого на станцию с помощью насосов подается вода, которая нагревается мощными нагревателями. Для обеспечения теплом самой станции часть потока нагретой воды проходит через помещения станции, охлаждается до первоначальной температуры и возвращается в поток воды, поступающий на станцию (см. рисунок). Известно, что если для обеспечения теплом самой станции используется десятая часть потока воды, то выходящая со станции вода нагревается на величину ΔT . На какую величину ΔT_1 нагреется вода на станции, если для обеспечения ее теплом будет использоваться восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем? Ответ обосновать.



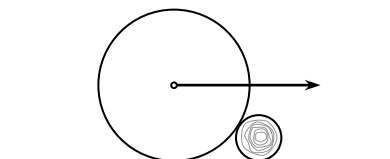
3. Из двух видов оловянной проволоки сделали предохранители. Проволока диаметром $d_1 = 0,2$ мм плавится (и предохранитель разрывает электрическую цепь) при пропускании через нее тока $I_1 = 1,8$ А. Проволока диаметром $d_2 = 0,5$ мм плавится при пропускании тока $I_2 = 5$ А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из тонкой и толстой проволок одинаковых длин, соединенных параллельно? Из десяти тонких и одной толстой проволоки одинаковых длин, соединенных параллельно? Считать, что сопротивление предохранителя много меньше сопротивления цепи.

4. Для предотвращения столкновений судов с землей в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка. Неподвижный точечный источник света S находится на расстоянии $d = 50$ см от зеркала АВ (см. рисунок). Зеркало вращается с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку O на рисунке). Найти скорость и ускорение изображения источника в зеркале.



5. Линия электропередач передает электроэнергию от электростанции потребителю. Потери мощности в линии составляют $\eta_1 = 5\%$ от мощности, получаемой потребителем. Во сколько раз нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, снизить потери в линии до $\eta_2 = 1\%$?

6. На дороге лежит бревно радиуса r . Перпендикулярно бревну едет автомобиль, колеса которого имеют радиус R . Считая, что коэффициенты трения колеса автомобиля о бревно и бревна о дорогу одинаковы, найти при каких значениях этого коэффициента колеса автомобиля смогут медленно переехать бревно. Весом бревна пренебречь.



Решения и критерии оценивания

1. Поскольку стержни прикреплены к стене и трубе шарнирно, они могут оказывать силы, направленные только вдоль них самих. Поэтому силы действуют на трубу так, как это показано на рисунке (силы реакции стержней обозначены как N_A и N_B). Проецируя условие равновесия трубы

$$m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$$

на вертикальную и горизонтальную оси, получим

$$N_A = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad N_B = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

А поскольку на каждую пару стержней приходится часть трубы длиной l , массу воды в этой части трубы можно найти как

$$m = \frac{1}{4} \rho \pi d^2 l$$

Поэтому находим

$$N_A = mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12} \rho \pi d^2 l g, \quad N_B = \frac{\rho \pi d^2 l g}{4 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{6} \rho \pi d^2 l g.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – использование условий равновесия трубы – 1 балл
 2. Правильная расстановка сил, действующих на трубу – 1 балл
 3. Правильно найдены силы реакции стержней - 1 балла
 4. Правильный ответ для силы реакции стержня А – 1 балл
 5. Правильный ответ для силы реакции стержня В – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть на станцию за малый интервал времени Δt из магистрального водопровода поступает масса воды $\Delta \mu$; такое же количество нагретой воды уходит со станции, поскольку вода не накапливается и не теряется на станции. За это время нагреватель выделяет количество теплоты

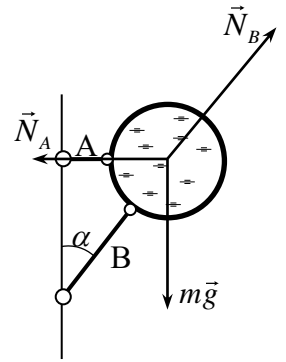
$$\Delta Q = P \Delta t$$

(P - мощность нагревателей). Это тепло расходуется на нагревание воды, поступающей на станцию из магистрального водопровода, и воды, которая вернулась в поток после отдачи тепла самой станции. Поэтому если в систему нагрева станции за интервал времени Δt уходила масса воды Δm , то мимо нагревателя за время Δt проходила масса воды $\Delta \mu + \Delta m$, причем Δm составляет (в первом случае) десятую часть всего потока, проходящего мимо нагревателя, т.е.

$$\Delta m = \frac{1}{10} (\Delta \mu + \Delta m) \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{1}{9} \Delta \mu$$

Следовательно, уравнение теплового баланса в первом случае дает

$$c \frac{10}{9} \Delta \mu \Delta T = P \Delta t$$



Во втором случае для отопления самой станции используется восьмая часть потока, нагреваемого нагревателем, поэтому уравнение теплового баланса дает

$$c \frac{8}{7} \Delta \mu \Delta T_1 = P \Delta t$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{7} = \frac{36}{35}$$

Отсюда

$$\Delta T_1 = \frac{35}{36} \Delta T = 0,97 \Delta T$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Знание формулы для количества выделенной теплоты - 1 балл**
- 2. Правильное распределение потоков воды на станции – 1 балл**
- 3. Правильное уравнение теплового баланса в первом случае (когда для отопления станции используется десятая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл**
- 4. Правильное уравнение теплового баланса во втором случае (когда для отопления станции используется восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл**
- 5. Правильный ответ – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Поскольку сопротивление проволоки обратно пропорционально площади ее поперечного сечения, сопротивления R_1 тонкой и R_2 толстой проволок одинаковой длины относятся как

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 6,25$$

Это значит, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковой длины ток в тонкой проволоке будет в 6,25 раз меньше, чем в толстой. А поскольку предельные токи в проволоках отличаются в $I_2 / I_1 = 2,8$ раза, то при увеличении тока в цепи первой перегорит толстая проволока в тот момент, когда сила тока в ней достигнет значения $I_2 = 5$ А. В этот момент во второй проволоке будет протекать ток

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} I_2 = 0,8 \text{ А,}$$

а ток в цепи достигнет значения

$$I_3 = I_2 + \frac{I_2 d_1^2}{d_2^2} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} I_2 = 5,8 \text{ А.}$$

После перегорания толстой проволоки весь этот ток потечет через тонкую проволоку (при условии, что ток в цепи не изменится, поскольку сопротивление предохранителя много меньше сопротивления остальной цепи), которая тоже перегорит.

Если соединить параллельно десять тонких проволок и одну толстую, то первой по-прежнему перегорит толстая проволока, когда ток через нее достигнет значения $I_2 = 5$ А. В этот момент ток через каждую тонкую проволоку будет равен $d_1^2 I_2 / d_2^2 = 0,8$. После перегорания он увеличится на 0,5 А в каждой проволоке, т.е. достигнет значения 1,3 А. Но тонкие проволоки не перегорят. Поэтому таким предохранителем цепь будет разрываться, при токе в ней

$$I_4 = 10I_1 = 18 \text{ А.}$$

Таким образом, предохранитель, составленный из соединенных параллельно одной толстой и одной тонкой проволок одинаковой длины, разрывает цепь при силе тока в ней

$$I_3 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} I_2 = 5,8 \text{ А,}$$

а предохранитель, составленный из соединенных параллельно десяти тонких и одной толстой проволок разрывает цепь при силе тока в ней

$$I_4 = 10I_1 = 18 \text{ А.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

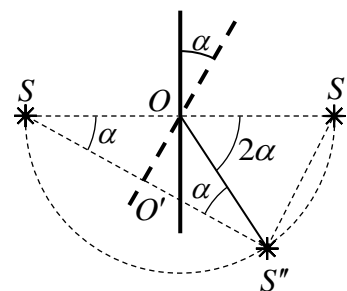
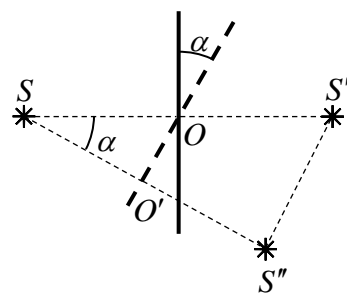
1. Правильно найдено отношение сопротивлений проволок - 1 балл
2. Правильно найдено отношение токов, текущих через предохранители при параллельном соединении проволок – 1 балл
3. Определено, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковых длин первой перегорит толстая проволока, и сразу же тонкая, т.е. предохранитель рассчитан на максимальный ток в толстой проволоке – 1 балл
4. Определено, что в предохранителе, составленном из одной толстой и десяти тонких проволок после перегорания толстой проволоки тонкие перегорать не будут – 1 балл
5. Правильно найден максимальный ток для предохранителя, составленного из одной толстой и десяти тонких проволок – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S'' ; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS'S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS'S'$ подобны, так как у них общий угол α , а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны с коэффициентом подобия 2 (поскольку расстояние от источника до изображения вдвое больше расстояния от источника до зеркала):

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол $SO'O$ - прямой (изображение источника лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало), то прямым является и угол $SS'S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой



кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до оси вращения зеркала, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке справа.

Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α . Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω' , которая вдвое больше угловой скорости зеркала

$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому скорость изображения источника постоянна (т.к. не зависит от угла поворота зеркала α) и равна

$$v = \omega'R = 2\omega R = 2\omega d = 1 \text{ м/с.}$$

Поскольку изображение движется по окружности с постоянной по величине скоростью, его ускорение – центростремительное. Оно равно

$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 R = 4\omega^2 d = 2 \text{ м/с}^2.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное построение изображения точечного источника в зеркале – 1 балл
 2. Доказательство, что изображение движется по окружности - 1 балл
 3. Правильное нахождение угловой скорости изображения – 1 балл
 4. Правильная формула для центростремительного ускорения – 1 балл
 5. Правильный ответ для ускорения изображения – 1 балла
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Пусть сопротивление линии r , сопротивление потребителя в первом случае - R_1 , напряжение на входе линии в первом случае - U_1 . Тогда ток в линии определяется законом Ома для участка цепи

$$I_1 = \frac{U_1}{r + R_1},$$

а мощность потерь P_0 , мощность, передаваемая потребителю $P_{номп}$, и отношение мощности потерь в линии к мощности, передаваемой потребителю, η_1 составляют

$$P_0 = \left(\frac{U_1}{r + R_1} \right)^2 r, P_{номп} = \left(\frac{U_1}{r + R_1} \right)^2 R_1, \eta_1 = \frac{P_0}{P_{номп}} = \frac{r}{R_1} \quad (*)$$

Из третьей формулы (*) следует, что чтобы понизить долю потерь, необходимо увеличить сопротивление потребителя по сравнению с сопротивлением линии. Но если сделать только это, то будет уменьшаться и мощность, передаваемая потребителю (см. вторую формулу (*)). Поэтому чтобы не изменилась мощность, передаваемая потребителю, нужно увеличить напряжение на входе линии. Найдем, какое напряжение нужно подать для уменьшения потерь до 1 %.

Итак, пусть новое напряжение на входе линии - U_2 , сопротивление потребителя - R_2 . Имейм

$$\left(\frac{U_1}{r+R_1}\right)^2 R_1 = \left(\frac{U_2}{r+R_2}\right)^2 R_2$$

Но поскольку сопротивление линии в η раз меньше сопротивления потребителя, получаем

$$\frac{U_1^2 \eta_1}{(1+\eta_1)^2 r} = \frac{U_2^2 \eta_2}{(1+\eta_2)^2 r}$$

Отсюда находим

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{\eta_1(1+\eta_2)^2}{\eta_2(1+\eta_1)^2}} = \frac{1+\eta_2}{1+\eta_1} \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = 2,15 \quad (**)$$

Поскольку множитель перед квадратным корнем в формуле (**) близок к единице (в нашем случае - 0,96), обычно считают, что для уменьшения потерь в n раз нужно повысить напряжение в линии в \sqrt{n} раз (в нашем случае это в 2,24 раза). И, конечно, в n раз нужно увеличить сопротивление потребителя.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – при увеличении напряжения на входе линии и сопротивления потребителя убывает доля потерь в передающих проводах – 1 балл
2. Правильное использование законов Ома и Джоуля-Ленца – 1 балл
3. Правильно найдена мощность, передаваемая потребителю - 1 балл
4. Правильно найдено, как нужно изменить сопротивление потребителя для уменьшения потерь до 1 % - 1 балл
5. Правильно найдено отношение напряжений на входе линии для уменьшения доли потерь до 1 % – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Чтобы колесо смогло переехать бревно, должны быть выполнены следующие условия: при контакте с колесом бревно не должно вращаться и не должно скользить по дороге. При выполнении этих условий сила трения \vec{F}_{mp} и сила реакции \vec{N} ,

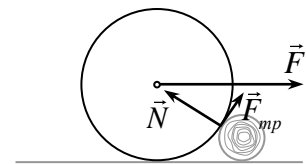


Рис.1 Силы, действующие на колесо

действующие на колесо в точке контакта с бревном (и которые можно увеличивать, нажимая на педаль «газа» автомобиля) поднимут колесо, и вместе с силой \vec{F} , действующей на колесо со стороны автомобиля, заставят «перевалить» через бревно. На рисунке 1 показаны силы, действующие на колесо со стороны бревна и автомобиля.

Исследуем выполнимость этих условий. На бревно действуют: силы реакции \vec{N} и трения \vec{F}_{mp} со стороны колеса и силы реакции \vec{N}_1 и трения $\vec{F}_{mp,1}$ со стороны земли (см. рисунок 2). Поскольку силы реакции проходят через центр бревна, то из уравнения моментов относительно центра заключаем, что

$$F_{mp} = F_{mp,1} \quad (1)$$

а из уравнения сил (в проекциях на горизонтальное направление)

$$N \cos \alpha - F_{mp} \sin \alpha = F_{mp,1} \quad (2)$$

где α - угол между силой реакции и поверхностью земли (см. рисунок 2). Отсюда находим

$$F_{mp} = F_{mp,1} = \frac{N \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

И уравнения для сил в проекциях на вертикальное направление найдем

$$N_1 = N \sin \alpha + F_{mp} \cos \alpha = N \sin \alpha + \frac{N \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = N$$

Таким образом, оба условия проскальзывания – между колесом и бревном $F_{mp} \leq \mu N$ и между бревном и дорогой $F_{mp,1} \leq \mu N_1$ – будут нарушаться одновременно. Эти условия дают

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq \mu$$

Учитывая, что

$$\sin \alpha = \frac{R - r}{R + r}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R + r},$$

получим условие переезда колеса через бревно

$$\mu \geq \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – колесо переезжает бревно благодаря силе трения между бревном и колесом – 1 балл
2. Доказано, что силы трения между колесом и бревном и между бревном и поверхностью одинаковы – 1 балл
3. Правильно использована формула для максимальной силы трения покоя - 1 балл
4. Доказано, что условия непроскальзывания между колесом и бревном и бревном и поверхностью будут нарушаться одновременно - 1 балл
5. Правильный ответ для минимального коэффициента трения, при котором колесо может переехать бревно – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.

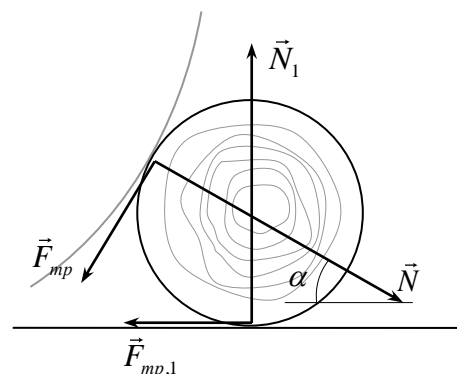


Рис.2 Силы, действующие на бревно