

№ _____
Регистрационный
номер

Фамилия _____

(не заполнять)

Имя _____

Отчество _____

(подпись)

«Утверждаю»

Председатель оргкомитета олимпиады

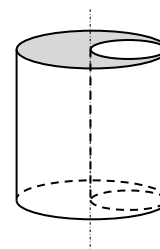


Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийская физико-математическая олимпиада «МИФИ»
Для выпускников бакалавриата

(Максимальная оценка – 50 баллов)

1. (5 баллов) Векторы скорости и ускорения частицы в некоторый момент времени определяются соотношением $\vec{v}(t) = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, $\vec{a}(t) = 7\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$, где \vec{e}_x , \vec{e}_y и \vec{e}_z – единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат, числа 2, 3, 4 имеют размерность скорости (м/с), числа 7, 6, и 5 – размерности ускорения (м/с²). Найти значение производной модуля скорости по времени dv/dt в этот момент.

2. (5 баллов) Тело представляет собой цилиндр радиусом R , из которого вырезали цилиндр радиусом $R/2$ (см. рисунок). Масса большого цилиндра до вырезания маленького) равнялась M . Найти момент инерции тела относительно оси большого цилиндра (показана на рисунке штрихпунктирной линией).



3. (10 баллов) АЭС имеет электрическую мощность 1000 МВт. Коэффициент полезного действия реакторной установки - $\eta = 33\%$. Теплоносителем служит вода, расход которой через активную зону в номинальном режиме работы равен $G = 20$ т/с. Температура теплоносителя на входе в активную зону равна $T_{вх} = 289$ °С. Определить температуру теплоносителя на выходе из активной зоны (в градусах Цельсия). Кипение теплоносителя отсутствует, теплоёмкость воды считать постоянной и равной 5000 Дж/(кг·К).

4. (15 баллов) Одна поверхность стеклянного диска толщиной $h = 5$ мм наэлектризована трением так, что поверхностная плотность заряда $\sigma = 10^{-2}$ Кл/см². Диск равномерно вращается вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости. Найти отношение магнитного момента диска к его моменту импульса. Плотность стекла $\rho = 2,4$ г/см³.

5 (15 баллов). Какова начальная масса образца некоторого радиоактивного вещества, если известно, что:

(а) это вещество образуется при трех α - и двух β -распадах изотопа урана ${}_{92}^{235}\text{U}$,

(б) за время, равное половине периода полураспада этого вещества, распалось $N_* = 1,82 \cdot 10^{18}$ атомов данного вещества?

Решения

1. Производная модуля скорости по времени определяется соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \left(2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right)$$

где v_x, v_y, v_z - компоненты вектора скорости. Учитывая, что

$$\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \text{ и } \frac{dv_z}{dt}$$

есть компоненты вектора ускорения, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v}\vec{a}}{v}$$

где v - модуль вектора скорости. Отсюда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v}\vec{a}}{v} = 9,6 \text{ м/с}^2.$$

2. Момент инерции целого цилиндра I_0 можно представить как

$$I_0 = I + I_1$$

где I - искомый момент инерции цилиндра с вырезанным малым цилиндром, I_1 - момент инерции малого цилиндра относительно оси большого цилиндра (совпадающей с образующей малого). Момент инерции малого цилиндра относительно его образующей найдем по теореме Штейнера

$$I_1 = \frac{mr^2}{2} + ma^2$$

где m - масса малого цилиндра, r - его радиус, a - расстояние от оси малого цилиндра до оси, совпадающей с его образующей. Поскольку радиус малого цилиндра равен половине радиуса большого $r = R/2$, его масса равна четверти массы большого цилиндра

$$m = M/4,$$

расстояние a равно $a = R/2$. Поэтому

$$I_1 = \frac{3}{32} MR^2$$

Учитывая, что $I_0 = MR^2/2$, получим

$$I = \frac{13}{32} MR^2$$

3. Чтобы обеспечить электрическую мощность $P = 1000$ МВт реакторная установка должна вырабатывать в единицу времени количество теплоты

$$Q = \frac{P}{\eta}$$

Это тепло уносится питательной водой, записывая уравнение теплового баланса для которой, получим

$$c\mu\Delta T = \frac{P}{\eta}$$

где μ - расход теплоносителя (воды), ΔT - изменение его температуры. Отсюда находим

$$T_{\text{вых}} = T_{\text{вх}} + \frac{P}{\eta c \mu} = 319^\circ \text{ C}$$

4. Магнитный момент диска (в системе СИ) определяется соотношением

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int dV [\vec{r}, \vec{j}] = \frac{\sigma}{2} \int dS [\vec{r}, \vec{v}]. \quad (*)$$

Здесь мы учли, что $\vec{j} = \frac{dq}{dV} \vec{v}$ и $\frac{dq}{dV} dV = \sigma dS$, и интегрирование в (*) ведется по поверхности диска. Поскольку скорость любого элемента диска направлена перпендикулярно радиус вектору и $v = \omega r$, то получаем, переходя к сферическим координатам

$$M = \frac{\sigma}{2} 2\pi\omega \int_0^R dr r^3 = \frac{\pi\sigma\omega}{4} R^4$$

Момент импульса диска $L = I\omega$, где $I = \int dV \rho r^2$ - момент инерции диска. В силу однородности диска имеем

$$I = \rho h 2\pi \int_0^R dr r^3 = \frac{2\pi\rho h}{4} R^4$$

Таким образом, искомое гиромангнитное отношение есть

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho h} = 4,17 \frac{\text{A} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$$

5. Три α -распада уносят из ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ 6 нейтронов и 6 протонов; в результате получается ядро ${}_{86}^{223}\text{Rn}$, а два β -распада - в ${}_{88}^{223}\text{Ra}$. По закону радиоактивного распада $N(t) = N_0 2^{-t/T}$, где N_0 - начальное количество атомов распадающегося вещества, $N(t)$ - количество атомов, не распавшихся к моменту времени t , T - период полураспада.

Пусть количество атомов ${}_{88}^{223}\text{Ra}$ в имеющемся образце равно N_0 . Поскольку через половину периода полураспада в образце останется

$$N_1 = N_0 2^{-1/2}$$

атомов вещества, то количество распадов, произошедших за это время, равно

$$N_* = N_0 - N_1 = N_0(1 - 2^{-1/2}) = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} N_0$$

Отсюда находим

$$N_0 = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)} N_*$$

Теперь можно найти массу m этого образца. Она находится из очевидного соотношения

$$m = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)} \frac{N_*}{N_A} M$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ г/моль – число Авогадро, $M = 223$ г/моль – молярная масса радия.

Подставляя данные условия, получаем

$$m = 0,00230 = 2,30 \cdot 10^{-3} \text{ г}$$