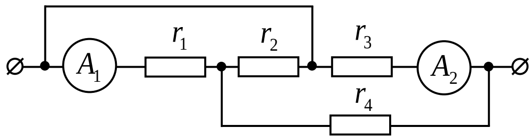
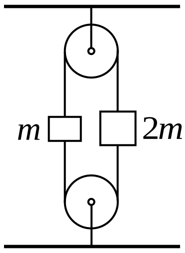
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса 2023-2024 учебного года, 9 класс Олимпиада по физике

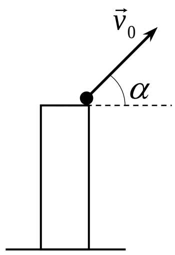
1. Электрическая цепь, схема которой дана на рисунке, содержит два идеальных амперметра и четыре одинаковых резистора $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$. Известно, что амперметр A_1 показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Найти показания амперметра A_2.



2. Механическая система состоит из двух тела массой m и $2m$, двух невесомых блоков, невесомых и нерастяжимых веревок (см. рисунок). Известно, что в положении, показанном на рисунке, обе нити натянуты, причем сила натяжения нижней нити равна T. Найти ускорения тел и силу натяжения верхней нити.

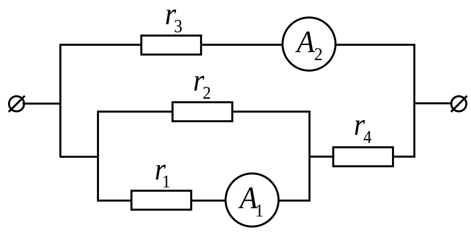


3. С верхушки очень высокой башни с одинаковой начальной скоростью v_0, под одинаковыми углами α к горизонту и в одной плоскости бросают два тела – сначала первое, а потом через интервал времени Δt - второе. Найти минимальное расстояние между телами в процессе движения обоих тел (т.е. когда оба тела уже будут двигаться). Через какое время после броска первого тела расстояние между телами будет минимально?



Решения и критерии оценивания

1. Перерисуем данную электрическую цепь, поменяв расположение резисторов и амперметров в пространстве (но не меняя их соединений друг с другом). Очевидно, данная в условии электрическая цепь может быть представлена в вид (см. рисунок). Сила тока, текущего через верхний участок цепи, состоящий из резистора r_3 и амперметра А2, равна



$$I_2 = \frac{U}{r_3} = \frac{U}{r}$$

где U - электрическое напряжение, приложенное к рассматриваемому участку цепи. Сопротивление нижнего участка цепи, состоящего из трех резисторов r_1, r_2, r_4 и амперметра А1, равно

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 = \frac{3}{2} r$$

Поэтому сила тока на нижнем участке цепи равна

$$I = \frac{2U}{3r}$$

Поскольку на участке параллельного соединения этот ток делится пополам, то через и амперметр А1 течет следующий электрический ток

$$I_1 = \frac{U}{3r}$$

Отсюда находим

$$I_2 = \frac{1}{3} I_1 = 0,33 \text{ А.}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильное использование закона Ома и правил сложения резисторов – 1 балл
2. Правильно нарисована эквивалентная схема цепи, на которой ясно виден характер соединения всех элементов – последовательно или параллельно – 1 балл
3. Правильно найден ток через амперметр А1 – 1 балл
4. Правильно найден ток через амперметр А2 – 1 балл
5. Получен правильный ответ для связи токов через амперметры – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. На тела действуют силы тяжести и силы натяжения веревок (нижней - T, верхней - T_1). Поэтому второй закон Ньютона дл тел имеет вид

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}_1$$
$$2m\vec{a}_2 = 2m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}_1$$

где $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ - ускорения тел. Поскольку большее тело будет опускаться вниз, то проекция этих законов на оси, направленную вниз для второго тела и вверх для первого, дает

$$ma_1 = T_1 - mg - T$$
$$2ma_2 = 2mg + T - T_1$$

Учитывая, что величины ускорений тел равны ($a_1 = a_2 = a$), н аходим из системы уравнений

$$a = \frac{1}{3}g$$

Подставляя это ускорение в любое из уравнений системы, получим

$$T_1 = T + \frac{4}{3}mg$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильно расставлены силы, действующие на тела системы – 1 балл
2. Правильные вторые законы Ньютона для тел системы – 1 балл
3. Правильные условия связи – одинаковость величин ускорений тел и их разное направление – 1 балл
4. Правильные ускорения тел системы – 1 балл
5. Правильная сила натяжения верхней нити – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Зависимости x-координат тел от времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут одинаковыми (с задержкой для второго тела)

$$x_1(t) = v_0 \cos\alpha \; t \;\; (\text{при } t > 0) \quad \text{и } x_2(t) = v_0 \cos\alpha \left(t - \Delta t\right) \;\; (\text{при } t > \Delta t)$$

Поэтому расстояние между телами по горизонтали

$$x_1(t) - x_2(t) = v_0 \cos\alpha \; \Delta t \qquad (*)$$

в процессе их движения меняться не будет, а будет оставаться все время одним и тем же (формула (*)). Следовательно, расстояние между телами

$$S = \sqrt{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)^2 + \left(y_1(t) - y_2(t)\right)^2}$$

будет минимально, когда минимальным будет расстояние между ними по вертикали $\left|y_1(t) - y_2(t)\right|$. А здесь возможны варианты в зависимости от величины Δt. Если за время Δt первое тело не успело спуститься до того уровня, на котором оно находилось в момент броска (т.е. при $\Delta t < 2v_0 \sin\alpha / g$), то в какой-то момент времени y-координаты первого и второго тел совпадут. Тогда минимальным расстояние между ними будет именно в этот момент времени и равным расстоянию между ними по горизонтали

$$S_{\min} = x_1(t) - x_2(t) = v_0 \cos\alpha \; \Delta t \; .$$

Следовательно, оно будет достигнуто в такой момент времени t_1 когда совпадут y-координаты тел. Т.е. в такой момент времени t_1 после броска первого тела, когда будет выполнено условие:

$$v_0 \sin\alpha t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = v_0 \sin\alpha\left(t_1 - \Delta t\right) - \frac{g\left(t_1 - \Delta t\right)^2}{2}$$

Решая это уравнение относительно t_1, найдем, что

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{\Delta t}{2}$$

Если же за время Δt первое тело успеет спуститься ниже своего начального уровня, то минимальное расстояние между телами будет достигаться в момент броска второго тела, т.е. через время Δt после бросания первого. И равно это расстояние будет величине

$$S_{\min} = \sqrt{\left(x_1(\Delta t) - x_2(\Delta t)\right)^2 + y_1^2(\Delta t)} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha\, \Delta t^2 + \left(v_0 \sin\alpha\, \Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}\right)^2}$$

Приводя в этом выражении подобные члены, получим

$$S_{\min} = \Delta t\sqrt{v_0^2 - v_0 \sin\alpha g\Delta t + \frac{g^2\Delta t^2}{4}}$$

Собирая все вместе, получим ответ для минимального расстояния между телами в те моменты времени, когда будут двигаться оба тела

При $\Delta t < \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ $\quad S_{\min} = v_0 \cos\alpha\, \Delta t$ через время $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + \dfrac{\Delta t}{2}$ после броска первого тела

При $\Delta t > \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ $\quad S_{\min} = \Delta t\sqrt{v_0^2 - v_0 \sin\alpha g\Delta t + \dfrac{g^2\Delta t^2}{4}}$ через время Δt после броска первого тела

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)

1. Правильно использованы законы равноускоренного движения – 1 балл

2. Правильно найдено расстояние между телами в процессе движения при $\Delta t < 2v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл

3. Правильно найдено время, через которое достигается минимальное расстояние между телами при $\Delta t < 2v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл

4. Правильно найдено минимальное расстояние между телами при $\Delta t > 2v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл

5. Правильно найдено время, через которое достигается минимальное расстояние между телами при $\Delta t > 2v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Юниор, математика, 9 класс, 6 апреля 2024

Вариант 1

1 Петя написал на доске все двузначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

2 Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 500, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 4, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{8}$.

Ответы и решения

Задача 1 Сумма S_1 произведений квадратов цифр всех двузначных чисел равна:

$$S_1 = \left(1^2+2^2+3^2+...+9^2\right)\cdot\left(1^2+2^2+3^2+...+9^2\right).$$

Воспользуемся формулой: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$. Получим:

$$1^2+2^2+3^2+...+9^2 = \frac{19\cdot 9\cdot 10}{6} = 285.$$

Тогда $S_1 = 285^2 = 81225.$

Сумма S_2 всех двузначных чисел равна: $S_2 = 10+11+12+...+98+99 = 109\cdot 45 = 4905.$

Сложив S_1 и S_2, получим результат Васи: $S_1+S_2 = 81225+4905 = 86130.$

Ответ: 86130.

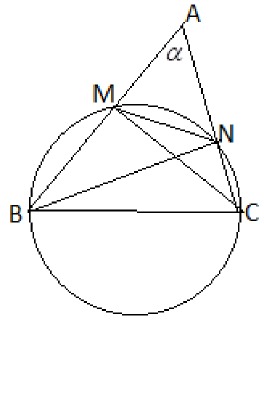
Задача 2. Пусть искомое число a имеет вид: $a = p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot ...\cdot p_m^{r_m}$. Здесь $p_1, p_2, ..., p_m$ – простые делители, $r_1, r_2, ..., r_m$ – их кратности. Так как по условию число a нечетное, то среди простых делителей нет 2 Число делителей числа a равно

$$Q = (r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)...(r_m+1).$$

По условию число делителей нечетное. Из этого следует, все его скобки являются нечетными числами, поэтому числа $r_1, r_2, ..., r_m$ – четные. Тогда a является квадратом нечетного числа, меньшим 500. Наибольшее из таких чисел $a = 21^2 = 441.$

Ответ: 441.

Задача 3. Заметим, что $BC = 2R = 8.$ Рассмотрим треугольники ANM и ABC. о Покажем, что они подобные. Во первых, они имеют общий угол $\angle BAC$ (обозначим его α). Во вторых, так как четырехугольник $\angle BMNC$ вписанный, то $\angle ABC = \angle MNA.$ Запишем коэффициент подобия:



$$k = \frac{AN}{AB} = \frac{AB\cos\alpha}{AB} = \cos\alpha = \frac{1}{8}.$$

Тогда $MN = BC \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1.$

Ответ: 1.

Вариант 2

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только четные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 15480.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 750, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 841.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 6, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{3}$.

Ответ: 4.

Вариант 3

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только нечетные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 28850.

2. Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 1000, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 961.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 5, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{5}$.

Ответ: 2.

Вариант 4

1. Петя написал на доске все трехзначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 23643575.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 1250, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 1369.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 8, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: 8.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

1 б – Записал сумму квадратов произведений заданных чисел, но не смог ее вычислить или вычислил с ошибкой.

2б – Вычислил сумму квадратов произведений заданных чисел, но забыл добавить сумму самих чисел.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2

1 б- Записал формулы представления числа в виде произведений степеней простых чисел и числа делителей через эти степени.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3

1 б –Правильно построил чертёж, нашел равные углы и подобные треугольники.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.