Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант № 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+\dfrac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть по кругу записаны положительные числа $a_1,\dots,a_{2023}$. Не ограничивая общности, можно считать что числа занумерованы так, что $a_{2023}=a$ – наибольшее из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут a_1 и a_2. Поскольку $0<a_1\le a,\ 0<a_2\le a,$ имеет место оценка $a^2=a_1+a_2\le 2a$. Таким образом, $0<a\le 2.$ Следовательно, для всех $k=1,\dots,2023$ верно, что

$$0<a_k\le 2.$$

С другой стороны, можно числа по кругу занумеровать так, чтобы $b_{2023}=b$ стало наименьшим из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут b_1 и b_2. Поскольку $0<b\le b_1,\ 0<b\le b_2,$ имеет место оценка $b^2=b_1+b_2\ge 2b$. Таким образом, $b\ge 2.$ Следовательно, для всех $k=1,\dots,2023$ верно, что

$$b_k\ge 2.$$

Оба эти условия могут быть выполнены только если все числа равны двум. Тогда их сумма будет $S=2\cdot 2023=4046.$
Ответ: 4046.

Задача 2. Область допустимых значений (ОДЗ) пар: $\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]>0\Rightarrow 10^{3y}\cdot 2^x\ge 1\Rightarrow 3y+x\lg 2\ge 0.$
Для любых допустимых x и y найдется целое число n, для которого выполнено $10^n\le 2^x<10^{n+1}$.
Тогда

$$\begin{cases} 10^{n+y}\le 10^y\cdot 2^x<10^{n+y+1} \\ 10^{n+3y}\le 10^{3y}\cdot 2^x<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 10^{n+y}\le 10^y\cdot 2^x<10^{n+y+1} \\ 10^{n+3y}\le \left[10^{3y}\cdot 2^x\right]<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n+y\le \lg\left(10^y\cdot 2^x\right)<n+y+1 \\ n+3y\le \lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]<n+3y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \left[\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)\right]=n+y \\ \left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]\right]=n+3y\end{cases}$$

Таким образом, для любой допустимой пары $(x;y)$ получаем

$$3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]=(n+y)-(n+3y)=-2y,$$

то есть $3x+5=-2y$ вне зависимости от n.

Теперь решаем уравнение $3x+2y+5=0$ в целых числах. Имеем

$$y=\frac{-5-3x}{2}=-3-2x+\frac{1+x}{2},$$

тогда находим частное решение $x_0=-1,\ y_0=-1.$ Отсюда, общее решение $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=-1+3k \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

Проверим, какие пары $(x;y)$ удовлетворяют ОДЗ:

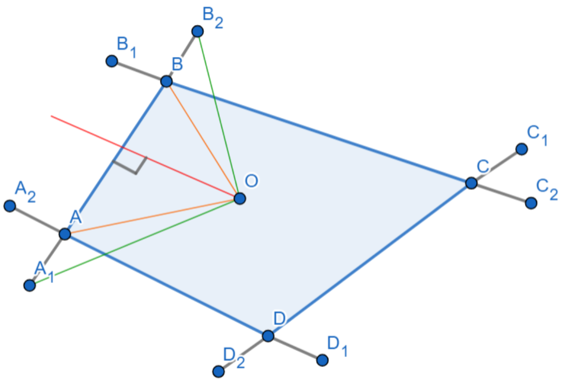
$$3y+x\lg 2\geq 0\Rightarrow 3(3k-1)+\lg 2\cdot(-1-2k)\geq 0\Rightarrow (9-\lg 4)k\geq 3+\lg 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\geq\left[\frac{3+\lg 2}{9-\lg 4}\right]+1=\left[\frac{\lg\left(2\cdot 10^{3}\right)}{\lg\left(25\cdot 10^{7}\right)}\right]+1=1.$$

Получаем, что допустимые значения $(x;y)$ отвечают $k\geq 1,$ поэтому наибольшее x соответствует $k=1,$ значит $x=-3,\ y=2$.

Ответ: $x=-3,\ y=2$

Задача 3. Пусть O – центр окружности радиуса $R=\sqrt{5}$, описанной около восьмиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$.



По условию: $AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=DD_2=1.$

Рассмотрим пересекающиеся хорды A_1D_2 и A_2B_1.

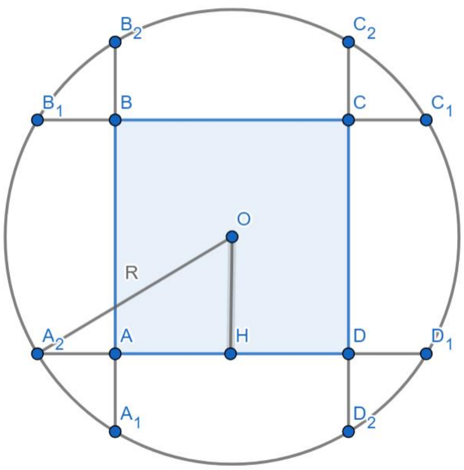
По свойству хорд окружности имеем

$AA_1\cdot AD_2=AA_2\cdot AB_1\Rightarrow AD_2=AB_1\Rightarrow AD=AB.$

Аналогично получим, что $AB=BC,\ BC=CD.$

Таким образом, все стороны четырехугольника $ABCD$ равны, значит он ромб.

Точка O, равноудаленная от вершин A_1 и B_2, а значит, и от вершин A и B, лежит на срединном перпендикуляре к отрезку A_1B_2, а значит, и на серединном перпендикуляре к стороне AB. Это верно и для остальных сторон четырехугольника $ABCD$, поэтому точка O равноудалена от всех его вершин и, таким образом, является центром окружности, описанной около четырехугольника. Поскольку $ABCD$ вписан и является ромбом, то он квадратом со стороной a. Пусть OH – расстояние от точки O до стороны AB $(OH\perp AB)$. Тогда получим в прямоугольном треугольнике A_2OH стороны



$$A_2O=R,\quad OH=\frac{a}{2},\quad A_2H=1+\frac{a}{2}.$$

При этом $\dfrac{a^2}{4}+\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2=R^2=5,$ откуда для нахождения стороны квадрата получаем уравнение $a^2+2a-8=0$ с положительным корнем $a=2$. Тогда площадь $ABCD$ равна $S=a^2=4.$

Ответ: $S=4$.

Вариант №2

1. По кругу написано 2024 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел

Ответ: 8096

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением y.

Ответ: $x=11,\ y=5$

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $S=1$

Вариант №3

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

Ответ: 2^{50}

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением x.

Ответ: $x=-1,\ y=1$

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+\frac{a}{3}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $S=16$

Вариант №4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

Ответ: 2500

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наименьшим возможным значением y.

Ответ: $x=-3,\ y=1$

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырех-угольника $ABCD$.

Ответ: $S=9$

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1.

обосновано только, что все числа в круге ≥ 2 (или ≤ 2) **1**

обоснованы оба свойсва и сделан вывод, что все числа равны 2, но имеется небольшая погрешность в вычислении нужной суммы **2**

полностью обоснованное верное решение **3**

Задача 2.

только ответ, подбор **0**

верно найдено ОДЗ **1**

на основе свойств целых чисел и сложных функций получены целочисленные уравнения и выписаны их решения, но не найдена или найдена с ошибкой требуемая пара решений **2**

задача решена полностью обоснованно и верно **3**

Задача 3.

только чертеж (чертежи) **0**

чертежи с обоснованием, что ABCD – квадрат **1**

выражена и найдена сторона квадрата и площадь, но имеются небольшие вычислительные погрешности **2**

полностью обоснованное верное решение **3**

1. A. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

7

8 8 8 9 8 7 8

Sample Output:

No

Sample Input:

7

7 7 9 9 7 9 7

Sample Output:

Yes

1.5 Решение

Посчитаем, сколько в массиве чисел кратных 9 (числа первого типа), сколько кратных 3, но не кратных 9 (числа второго типа) и остальных чисел (третий тип).

Рассмотрим случай, когда нет чисел второго типа. Тогда достаточно поставить поочередно числа первого и третьего типа. Если нам хватает чисел первого типа для такой расстановки – ответ "Yes", иначе это невозможно.

Рассмотрим более сложный случай – у нас есть числа второго типа. Очевидно, что нам нет смысла специально ставить рядом числа первого типа или ставить рядом первый и второй тип. Но тогда числа кратные 3 (второго типа) должны идти друг за другом, иначе не будет выполняться условие задачи. Получается, что достаточно их поставить, например, в начало массива. После этого задача сводится к более простой, уже рассмотренной нами. Непосредственно в коде строить такой массив не нужно, достаточно проверить несколько условий. Решение за O(n).

```python
type1 = 0
type2 = 0
type3 = 0
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
for i in range(n):
    if a[i] % 9 == 0:
        type1 += 1
    elif a[i] % 3 == 0:
        type2 += 1
    else:
        type3 += 1
if type2 == 0:
    if n // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
else:
    if (n - type2 + 1) // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

2. B. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую $b-1$;
3) За третью $b-2$ и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.

Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R ($L \leq R$), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \leq n \leq 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \leq a_i \leq 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \leq q \leq 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \leq L \leq n$, $1 \leq b \leq 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:

```
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
```

Sample Output:

```
1
2
8
5
```

2.5 Решение

Рассмотрим 1 игровую сессию, где число b определяет уровень удовольствия и где в игру надо отыграть a сессий. Тогда получится, что мы получим по очереди b, b-1, …, b – a + 1 удовольствия. Это сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым элементом b – a + 1 и количеством элементов равным a. Тогда сумма такой прогрессии равна (b – a + 1 + b) * a / 2 = (2 * b * a – a * a + a) / 2. Рассмотрим обработку запроса. Нам достаточно идти указателем по массиву и поддерживать текущее удовольствие. Если при игре во все игры до текущей позиции включительно удовольствие стало строго больше предыдущего максимума, то это оптимальный ответ на данный момент. Так можно сделать, просто пройдясь по массиву для каждого запроса. Решение за O(n*q).

```
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
q = int(input())
while q:
      l, b = map(int, input().split())
      l -= 1
      su = 0
      ans = -1e18
      R = -1
      for i in range(l, n):
            su += (a[i] + 2 * a[i] * b - a[i] * a[i]) // 2
            if su > ans:
                  R = i + 1
                  ans = su
      print(R)
      q -= 1
```

3. C. Объедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады "ЮНИОР". В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

3.4 Пример входных данных

Sample Input:
3 1
2
Sample Output:
4

3.5 Решение

Заметим, что, если переформулировать условие, то нужно выбрать из n чисел от 1 до n любой набор из них, размер которого не является нелюбимым числом. Количество всех различных наборов размера x – это число сочетаний из n по x. Есть известная формула, что сумма всех сочетаний из n по 0, 1, 2, …, n равна 2^n. Это число можно быстро посчитать по данному модулю, применив бинарное возведение в степень. Нам нужны все сочетания из n по 1, …, n за исключением k из них. Получается, что ответом будет являться разность 2^n и сочетаний из n по 0, из n по a_1, из n по a_2 и тд. Эти ~20 сочетаний можно посчитать по обычной формуле сочетаний, так как $a_i \le 2*10^5$. Также нужно помнить, что все операции должны проводится по данному модулю. Решение за $O(\log(n)+k*\max(a_i))$.

```python
m = 1000000007

def pw(a, b):
    ans = 1
    while b:
        if b % 2:
            ans = (ans * a) % m
        a = (a * a) % m
        b //= 2
    return ans

n, k = map(int, input().split())
a = list(map(int, input().split()))
ans = pw(2, n)
ans = m - 1 + ans
ans %= m
for i in range(k):
    s = 1
    s1 = 1
    for j in range(n - a[i] + 1, n + 1):
        s *= j
        s %= m
    for j in range(2, a[i] + 1):
        s1 *= j
        s1 %= m
    s1 = pw(s1, m - 2)
    s *= s1
    s %= m
    ans += m - s
    ans %= m
print(ans)
```