

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс**

Вариант 1.

1. Петя просматривал календарь 21 века, начиная с 2001 года и заканчивая 2100 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n . Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 21 веке?
2. Найти все y , для которых уравнение $\sin y \cdot (x - \sin y)^2 + \cos y \cdot (x - \cos y)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.
3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD \triangle BCD$. На ее дуге BD , не содержащей точки C , взята точка A так, что $\angle BAD = 30^\circ$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 2.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть a – частное от деления n на 100, b – остаток от деления n на 100. Тогда $n = 100a + b$. Последний год века «счастливый»: $a = 21, b = 0$. Для всех остальных n частное $a = 20$, а остаток $b \in [1; 99]$. По условию, год счастливый, если $(b + 2000) : (b + 20)$, тогда $\frac{b+2000}{b+20} = \frac{b+20}{b+20} + \frac{1980}{b+20}$. Таким образом, число $b + 20 \geq 21$ должно быть делителем числа $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Найдём число делителей этого числа. Всего число 1980 имеет $(2+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 36$ делителей, среди которых 13 (1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,15,18,20) меньше 21. Поэтому каждому из $36-13=23$ делителей соответствует свое $b \geq 1$ и свой номер «счастливого» года.

Ответ: 24 года.

Задача 2. Пусть $a = \sin y, b = \cos y$. Запишем исходное уравнение в виде $b \cdot (x - a)^2 + a \cdot (x - b)^2 = 0$, тогда $(a + b) \cdot x^2 - 2(a^2 + b^2) \cdot x + a^3 + b^3 = 0$. Получим квадратное уравнение, если $(a + b) \neq 0$. И линейное уравнение, если $(a + b) = 0$. Если уравнение линейное, то получим единственное решение при условии $a + b = 0, a \neq 0$.

Откуда $\sin y + \cos y = 0$. Тогда $\operatorname{tgy} = -1 \rightarrow y = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

Если уравнение квадратное, то единственное решение получим, при условии $a + b \neq 0, D/4 = 0$.

$\frac{D}{4} = (a^2 + b^2)^2 - (a^3 + b^3) \cdot (a + b) = -ab(a - b)^2 = 0$. Значит, $a = 0$ или $b = 0$, или $a = b$.

$$a = 0, b \neq 0, \sin y = 0, y = \pi m, m \in Z.$$

$$b = 0, a \neq 0, \cos y = 0, y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$a = b, a \neq 0, b \neq 0, \sin y = \cos y, y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Объединяя все варианты, приходим к выводу, что при $y = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $y = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.

Задача 3. По условию задачи $\triangle BCD$ и $\triangle BAD$ вписаны в окружность, значит четырёхугольник $ABCD$ также вписан в окружность. По свойству углов вписанного четырёхугольника $\angle BCD = 150^\circ$, так как $\angle BAD = 30^\circ$.

Дополнительное построение: проведём диаметр $CM = d$ ($CM \perp BD$).

$\triangle MCD$ – прямоугольный (опирается на диаметр), $\cos \angle DCM = \frac{CD}{d} = \frac{CB}{d}$.

$\triangle BCD$ – равнобедренный, значит CM делит $\triangle BCD$ на два равных прямоугольных (по построению) треугольника (треугольники равны по общему катету и гипотенузе $CB = CD$), $\angle BCM = \angle DCM = 75^\circ$.

Рассмотрим $\triangle MCA$ – прямоугольный (опирается на диаметр). Пусть $\angle ACM = \alpha$, тогда $\cos \angle ACM = \cos \alpha = \frac{CA}{d}$.

Площадь $S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot \sin(75 - \alpha)$, а $S_{\triangle DCA} = \frac{1}{2} DC \cdot CA \cdot \sin(75 + \alpha)$.

Сумма этих площадей даст искомую площадь четырёхугольника $ABCD$.

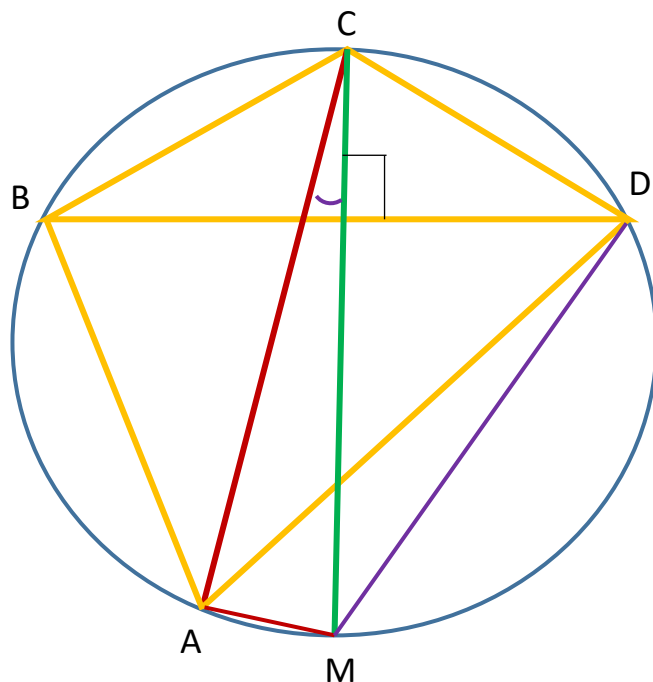
$$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot (\sin(75 - \alpha) + \sin(75 + \alpha)),$$

применяя формулы синуса суммы и разности, получим:

$$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2 \sin 75 \cdot \cos \alpha. \text{ Откуда } S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2 \sin 75 \cdot \frac{CA}{d},$$

$$S_{DABCD} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2 \sin 75 \cdot \frac{CB}{d} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2 \sin 75 \cdot \cos 75 = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot \sin 150 = \frac{CA^2}{4} = 1.$$

Ответ: 1.



Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n . Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y , для которых уравнение $\sin y \cdot (x - \sin y)^2 + \operatorname{ctgy} \cdot (x - \operatorname{ctgy})^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, y = \pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD . На ее дуге BD , не содержащей точки C , взята точка A так, что $\angle BAD = 45^\circ$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Ответ: 0,5.

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n . Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y , для которых уравнение $\cos y \cdot (x - \cos y)^2 + \operatorname{tgy} \cdot (x - \operatorname{tgy})^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \pi k, y = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD . На ее дуге BD , не содержащей точки C , взята точка A так, что $\angle BAD = 60^\circ$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Ответ: 3.

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n . Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

Ответ: 8 лет.

2. Найти все y , для которых уравнение $\operatorname{tgy} \cdot (x - \operatorname{tgy})^2 + \operatorname{ctgy} \cdot (x - \operatorname{ctgy})^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD . На ее дуге BD , не содержащей точки C , взята точка A так, что $\angle BAD = 120^\circ$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Рассуждения о делителях, подбор части решений.

1 б – Верно составлена математическая модель числа n (введены все переменные и указаны их области изменения). Найден один или несколько «счастливых» годов (с проверкой).

2 б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Записана формула «счастливого» года или указано верное разложение числа, полученного в ходе решения, на простые множители.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Какие-то преобразования, подбор частных решений.

1 б – Верно сведено к квадратному уравнению.

2 б – Рассмотрен один из случаев: $D=0$ или первый коэффициент в квадратном уравнении равен нулю.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б -Нарисован чертёж, найдены элементы треугольника, недостаточные для решения задачи.

1б – Доказано равенство двух равных треугольников на чертеже или с полным обоснованием.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Задача решена для частного случая ($AB=AD$).

3 б - Задача решена верно.

1. А. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n . Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n ($1 \leq a_i \leq 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

```
7
8 8 8 9 8 7 8
```

Sample Output:

```
No
```

Sample Input:

```
7
7 7 9 9 7 9 7
```

Sample Output:

```
Yes
```

1.5 Решение

Посчитаем, сколько в массиве чисел кратных 9 (числа первого типа), сколько кратных 3, но не кратных 9 (числа второго типа) и остальных чисел (третий тип).

Рассмотрим случай, когда нет чисел второго типа. Тогда достаточно поставить поочередно числа первого и третьего типа. Если нам хватает чисел первого типа для такой расстановки – ответ “Yes”, иначе это невозможно.

Рассмотрим более сложный случай – у нас есть числа второго типа. Очевидно, что нам нет смысла специально ставить рядом числа первого типа или ставить рядом первый и второй тип. Но тогда числа кратные 3 (второго типа) должны идти друг за другом, иначе не будет выполняться условие задачи. Получается, что достаточно их поставить, например, в начало массива. После этого задача сводится к более простой, уже рассмотренной нами. Непосредственно в коде строить такой массив не нужно, достаточно проверить несколько условий. Решение за $O(n)$.

```
type1 = 0
type2 = 0
type3 = 0
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
for i in range(n):
    if a[i] % 9 == 0:
        type1 += 1
    elif a[i] % 3 == 0:
        type2 += 1
    else:
        type3 += 1
if type2 == 0:
    if n // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
else:
    if (n - type2 + 1) // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

2. В. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i -ой игре есть $a[i]$ число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b , определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i -ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

- 1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
- 2) За вторую $b-1$;
- 3) За третью $b-2$ и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все $a[i]$ сессий.

Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b . Найдите такое число R ($L \leq R$), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленный тип данных в вашем языке (`long long` в C++, `Long` в Java и т.д.).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \leq n \leq 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n ($1 \leq a_i \leq 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \leq q \leq 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \leq L \leq n, 1 \leq b \leq 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i -я строка должна содержать лучшее значение R для i -ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:

```
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
```

Sample Output:

```
1
2
8
5
```

2.5 Решение

Рассмотрим 1 игровую сессию, где число b определяет уровень удовольствия и где в игру надо отыграть a сессий. Тогда получится, что мы получим по очереди $b, b-1, \dots, b - a + 1$ удовольствия. Это сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым элементом $b - a + 1$ и количеством элементов равным a . Тогда сумма такой прогрессии равна $(b - a + 1 + b) * a / 2 = (2 * b * a - a * a + a) / 2$. Рассмотрим обработку запроса. Нам достаточно идти указателем по массиву и поддерживать текущее удовольствие. Если при игре во все игры до текущей позиции включительно удовольствие стало строго больше предыдущего максимума, то это оптимальный ответ на данный момент. Так можно сделать, просто пройдясь по массиву для каждого запроса. Решение за $O(n*q)$.

```
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
q = int(input())
while q:
    l, b = map(int, input().split())
    l -= 1
    su = 0
    ans = -1e18
    R = -1
    for i in range(l, n):
        su += (a[i] + 2 * a[i] * b - a[i] * a[i]) // 2
        if su > ans:
            R = i + 1
            ans = su
    print(R)
    q -= 1
```

3. С. Обьедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады "ЮНИОР". В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \leq n \leq 10^9$) и k ($1 \leq k \leq \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел a_1, a_2, \dots, a_k ($1 \leq a_i \leq \min(n, 2 \cdot 10^5)$), $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

3.4 Пример входных данных

Sample Input:

3 1

2

Sample Output:

4

3.5 Решение

Заметим, что, если переформулировать условие, то нужно выбрать из n чисел от 1 до n любой набор из них, размер которого не является нелюбимым числом. Количество всех различных наборов размера x – это число сочетаний из n по x . Есть известная формула, что сумма всех сочетаний из n по $0, 1, 2, \dots, n$ равна 2^n . Это число можно быстро посчитать по данному модулю, применив бинарное возведение в степень. Нам нужны все сочетания из n по $1, \dots, n$ за исключением k из них. Получается, что ответом будет являться разность 2^n и сочетаний из n по 0 , из n по a_1 , из n по a_2 и т.д. Эти ~ 20 сочетаний можно посчитать по обычной формуле сочетаний, так как $a_i \leq 2 \cdot 10^5$. Также нужно помнить, что все операции должны проводиться по данному модулю. Решение за $O(\log(n) + k \cdot \max(a_i))$.

```
m = 1000000007
```

```
def pw(a, b):  
    ans = 1  
    while b:  
        if b % 2:  
            ans = (ans * a) % m  
        a = (a * a) % m  
        b //= 2  
    return ans
```

```
n, k = map(int, input().split())  
a = list(map(int, input().split()))  
ans = pw(2, n)  
ans = m - 1 + ans  
ans %= m  
for i in range(k):  
    s = 1  
    s1 = 1  
    for j in range(n - a[i] + 1, n + 1):  
        s *= j  
        s %= m  
    for j in range(2, a[i] + 1):  
        s1 *= j  
        s1 %= m  
    s1 = pw(s1, m - 2)  
    s *= s1  
    s %= m  
    ans += m - s  
    ans %= m  
print(ans)
```