536593
Регистрационный номер

Фамилия Омельчук
Имя Григорий
Отчество _____

220
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

_____

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наименьшим возможным значением y.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

220

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по Математике

Дата 06.04.24
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	0	1				2	

№1

представим наши 25 чисел в виде $a_1, a_2 \dots a_{25}$

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_{25} a_{24}$

Без ограничения общности представим

$a_{24}^2 = a_{25} + a_1$

$a_{25}^2 = a_1 + a_2$

$a_1^2 = a_2 + a_3$

$a_2^2 = a_3 + a_4$

$a_{25} = \sqrt{a_2 + a_3} + \sqrt{a_3 + a_4}$

Расписывая дальше по слагаемым a_2, a_3, a_4, выражение равенства будет иметь подобный вид:

$$a_{25} = \sqrt{\dots\sqrt{a_n + a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1} + a_{n+2}} + \dots\sqrt{a_{n+k} + a_{n+k+1}}} + \sqrt{\dots\sqrt{a_{n+1} + a_{n+2}} + \sqrt{a_{n+2} + a_{n+3}} + \dots + \sqrt{a_{n+k+1} + a_{n+k}}}$$

Из чего можно сделать вывод, что на каком-то этапе подобных преобразований в выражении a_k появится a_{25}. Тогда давайте по индукции докажем, что ситуация возможна при $a_1 = a_2 = a_3 \dots$ и т.д.

База:

a_1, a_2, a_3

$a_1 = \sqrt{a_2 + a_3}$

$a_2 = \sqrt{a_1 + a_3}$

$a_3 = \sqrt{a_1 + a_2}$

$a_1 = \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1 + a_2}}$

$a_1^2 = a_2 + \sqrt{a_1 + a_2}$

$a_1^2 - 2a_2 a_1 + a_2^2 = a_1 + a_2$

$a_2^2 - a_2 - 1 - \sqrt{2a_1 + 1}$

$a_1 = \frac{2a_2 + 1 \pm \sqrt{4a_2^2 + 4a_2 + 1 + 4a_2^2 + 4a_2}}{2}$

$a_1^2 - 2a_2 a_1 + a_2^2 - a_1 - a_2 = 0$

$a_1^2 - (2a_2 + 1)a_1 + a_2(a_2 + 1) = 0$

откуда $\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 + 1 \\ a_1 = a_2 \end{cases}$ проверим, если $a_2 + 1 = a_1$ $a_2 = \sqrt{2a_1 + 1}$

итого $a_2 = \sqrt{a_2 + 1 + \sqrt{2a_1 + 1}}$

$a_2^2 = a_2 + 1 + \sqrt{2a_1 + 1}$

итого $a_2 \le 0$

№1 продолжение.

если $a_2 \le 0$ - не подходит по условию.

тогда $a_2 = a_1$ $a_3 = \sqrt{a_2 + a_1} = \sqrt{2a_2}$

Т.к. рассматривали без огранич. общности, то $a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt{2a_1}$, а $\Rightarrow$

$a_1 = a_2 = a_3 = 2$.

Теперь докажем для $n+1 \le 25$ предположим для n и верно, что все числа равны.

$a_n = \sqrt{a_2 + a_3}$

$a_2 = \sqrt{a_3 + a_4}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2}$

Воспользовавшись преобразованиями, представленными в "базе", получим, что $a_{n+1} = \sqrt{2a_1}$, также, т.к. мы брали рандомное n, то $a_1 = \sqrt{2a_2}$, $a_2 = \sqrt{2a_3}$

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 a_n$

Откуда видно, что $a_1 = a_2 = \dots a_{25} = 2$

$\Sigma^2 = (25 \cdot 2)^2 = 50^2 = 2500$

Ответ: 2500.

(1)

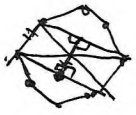
№2

$2x+1 = [\log(10^{-4} \cdot 5^x)] - [\log(10^{4} \cdot 5^x)]$

$2x+1 = [\log_{10}(10^{-4} \cdot 5^x)] - [\log_{10}[10^4 \cdot 5^x]]$

$2x+1 = [\log_{10} 10^{-4} + \log_{10} 5^x] - [\log_{10}[10^4 \cdot 5^x]]$

Тогда



$\Rightarrow$

Тогда восьмиугольник

Правильный $\Rightarrow Q_1Q_2 = Q_2Q_3$

$\left(\frac{a}{2}+4\right)^2 + \left(\frac{a}{2}+4\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{130}}{2}\right)^2$

$\frac{a^2}{4} + 4a + 16 + \frac{a^2}{16} + 2a = \frac{130}{4}$

$a^2 + 16a + 16 \cdot 4 + \frac{a^2}{4} + 8a = 130$

$\frac{5}{4}a^2 + 24a + 64 = 130$

$\frac{5}{4}a^2 + 24a - 66 = 0$

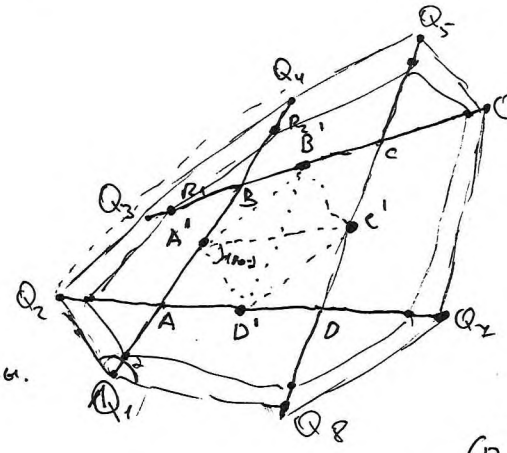
$a = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot 66}}{2 \cdot \frac{5}{4}}, = \frac{12}{5}$

Ответ

$S_{ABCD} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{144}{25}$

№3



Назовём вершины восьмиугольника точками Q_i инд. см рис.

$A'B'C'D'$ - парал-м по теореме Вариньона $\Rightarrow A'B' = CD'$, $AD' = B'C'$

Заметим, что тогда $Q_3Q_4 \parallel A'B'$

($R_1B = BB_1$; $R_2B = BA'$, $\angle A'BB' = \angle R'BR_2$ $\Rightarrow \Delta A'BB' = \Delta R_1BR_2$ $\Rightarrow R_1R_2 \parallel A'B'$, А т.к. $Q_3R_1 = 4$ и $Q_4R_2 = 4$ т.к. равноуд. от прямых)

$\Rightarrow$ Аналогично для $Q_2Q_1 \parallel A'D' \parallel B'C' \parallel Q_5Q_6$

$Q_3Q_4 \parallel A'B' \parallel C'D' \parallel Q_8Q_7$

но аналогии $A'C' \parallel Q_5Q_4 \parallel Q_1Q_8$

и $B'D' \parallel Q_3Q_2 \parallel Q_6Q_7$

поскольку вокруг восьмиугольника можно описать окружность, то это значит, что попарно его углы сумма рно 180°

на примере $\angle Q_2Q_1Q_8$ без огран. общности.

продлим Q_2Q_1 за Q_1 до М

$\angle M Q_1Q_7 = 180^\circ$

$\angle MQ_1Q_8 = 180^\circ - \angle Q_2Q_1Q_8 = \angle A'A'B'$

Т.к. $Q_1Q_8 \parallel A'C'$

$Q_2Q_1 \parallel A'D'$ $\Rightarrow$ по аналогии и для других углов парал-мы Вариньона

$\Rightarrow A'B'C'D'$ - можно вписать в окружность $\Rightarrow$ это прямоугольник, т.к. парал. и противополож. углы $\Sigma = 180^\circ$

Из этого понятно, что $ABCD$ - ромб, т.к. $AC' \perp B'D'$ и $A'D'$ срединн.

$\Rightarrow AC \parallel BD$

Аналогично для $B'D'$

(1)