536330
Регистрационный номер

Фамилия Волченков

Имя Даниил

Отчество Алексеевич

ЧДЧ
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 109 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.

3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 404
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24

Вариант № 4

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	2	0				3	

№1 n - счастливое

$n // 100 + n \% 100 = x$, где $n : x$

при любом n, $n // 100 = 24$ (когда $n = 2400$), а в остальных случаях $n // 100 = 23$

23 - простое число; а для того, чтобы n являлось счастливым, n не должно быть простым числом. ($23 + n \% 100$ может быть любым)

Минимальная такая сумма - это $n \% 100 = 1 \Rightarrow 23 + 1 = (24)$ - min

Максимальная сумма → $n \% 100 = 99 \Rightarrow 23 + 99 = (122)$ - max.

Значит, при $2301 \le n \le 2400$ верно следующее:

$(n // 100 + n \% 100) \cdot k = n \Rightarrow$

$\begin{cases} 24 \cdot k \le 2301 \\ 122 \cdot k \ge 2400 \end{cases} \Leftrightarrow$

$k \ge 19, \ldots$

2400 | 122
122 | 19, ...
1180
1098
82

$\Rightarrow k \ge 20$

(т.к. k - целое число, то можно сказать, что $k \ge 20$)

2301 | 24
216 | 95, ...
141
120
21

Найдя каким целым значениям может быть равно k и прибавить 1 (2400 - тоже счастливое), можем сказать, что это и есть искомое кол-во счастливых чисел.

$k \le 95$

$$\begin{cases} k \geq 20 \\ k \leq 95 \end{cases} \Rightarrow \text{кол-во } k = 95-20+1 = 76 + \text{случаб, когда } n = 1400$$

Ответ: ~~72~~

1

ШИФР: 404
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24.
Вариант № 4
Площадка написания: МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2 $\operatorname{tg}\alpha \cdot (x-\operatorname{tg}\alpha)^2 + \operatorname{ctg}\alpha \cdot (x-\operatorname{ctg}\alpha)^2 = 0$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ Замена: $t = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{t}$

$t\cdot(x-t)^2 + \frac{1}{t}\left(x-\frac{1}{t}\right)^2 = 0$

$t\cdot(x^2-2tx+t^2) + \frac{1}{t}\left(x^2-\frac{2x}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=0$

$tx^2-2t^2x+t^3+\frac{x^2}{t}-\frac{2x}{t^2}+\frac{1}{t^3}=0$

$x^2\left(t+\frac{1}{t}\right)-2x\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)=0$

$D = \left(2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)\right)^2 - 4\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)=0$

$\left(2t^2+\frac{2}{t^2}\right)^2 - 4\cdot\left(t^4+\frac{t^3}{t^3}+\frac{t}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)=0$

$4t^4+\frac{2\cdot 2t^2\cdot 2}{t^2}+\frac{4}{t^4}-4t^4-4t^2-\frac{4}{t^2}-\frac{4}{t^4}=0$

$8-4t^2-\frac{4}{t^2}=0 \quad |\cdot t^2 \ (\text{т.к. } \operatorname{tg}^2\alpha \neq 0)$

$-4t^4+8t^2-4=0 \quad |:-4$

$t^4-2t^2+4=0$

Замена $t^2=a \rightarrow t^4=a^2$

Уравнение $a\cdot x^2+bx+c=0$ имеет 1 решение, когда $D=b^2-ac=0$

$a=0$?

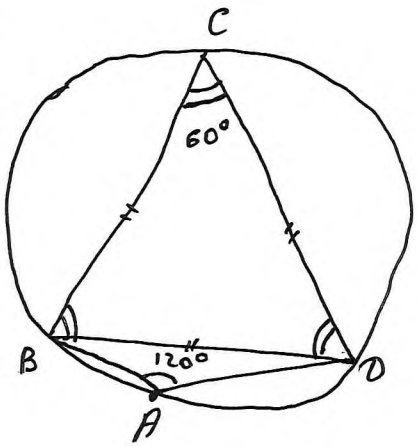
$a^2 - 2a + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0 \qquad a_1 = \frac{2}{2} = 1$

$$tg^2 \alpha = 1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 1 \\ tg\,\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right., \text{ где } n, k \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $n, k \in Z$ (2)

№3



① $\angle BAD$ – вписан. угол $\Rightarrow \cup BCD = \angle BAD \cdot 2 = 240°$

$\cup BAD = 360° - \cup BCD = 120°$

$\angle BCD$ опирается на дугу $BAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCD = 120° : 2 = 60°$

② $P_{-им}$ $\triangle BCD$:

$\angle CBD = \angle CDB$ (т.к. $\triangle BCD$ – равнобедр.) $\Rightarrow \angle CBD = \angle BDC = (180° - 60°) : 2 = 60° \Rightarrow$

$\angle BCD = 60°$

$\Rightarrow \triangle BCD$ – р/ст.

536330
Регистрационный номер

Фамилия Волченков
Имя Даниил
Отчество Алексеевич

760
(не заполнять)

Подпись

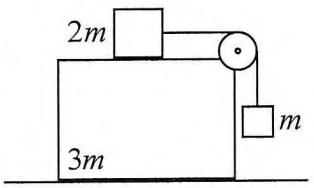
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0{,}18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0{,}21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0{,}14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 760
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24

Вариант № _____

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№1

Дано:

$V = 20\ л = 0{,}02\ м^3$

$V_0 = 0{,}5\ л = 0{,}005\ м^3$

$P_{max} = 1 \cdot 10^6\ Па$

$\rho_{газ} = 800\ кг/м^3$

$M = 28\ г/моль$

$R = 8{,}31\ Дж/моль \cdot градус$

$T_{комн} = 20°C$

Найти: $T_{max} = ?$

Уравнение Менделеева-Клапейрона: $P \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$

$\nu = \frac{m}{M}$ $\quad m = \rho_{газ} \cdot V_0 = 800 \cdot 0{,}005 = 4\ кг$

$\nu = \frac{4000}{28}$ $\quad P_{max} \cdot V = \nu \cdot R \cdot T_{max}$

(Газ будет расширяться и заполнит полностью сосуд)

$0{,}02 \cdot 10^6 = \frac{4000}{28} \cdot 8{,}31 \cdot T_{max}$

$20\,000 = \frac{4000}{28} \cdot 8{,}31 \cdot T_{max}$

$5 = \frac{8{,}31}{28} \cdot T_{max}$ $\quad T_{max} \approx \frac{5}{0{,}3}$

$T_{max} \approx 16{,}7$

Ответ: да, разорвётся; т.к. комнатная температура больше максимальной, при кот. сосуд сдержит это давление.

45

№2

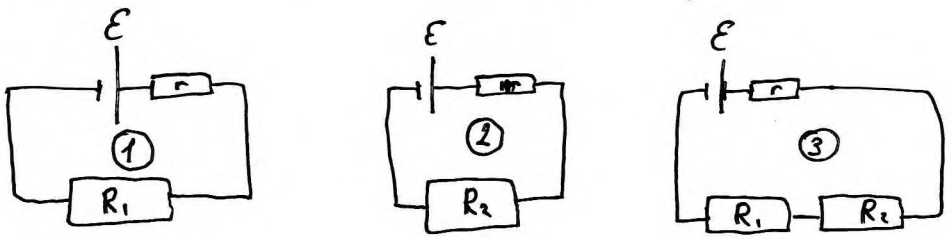
$I_1 = 0{,}18$ A

$I_2 = 0{,}21$ A

$I_3 = 0{,}14$

Т.к. источник → ЭДС ⇒ существует его внутр. сопротивл. (r)

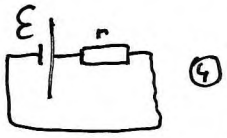
поэтому перепишем эти случаи можно так:



По Закону ОМА:

$$I = \frac{U}{R} \longrightarrow R = \frac{U}{I} \longrightarrow U = I \cdot R$$

Нужно найти:



$I = ?$

1й случай: $\mathcal{E} = I_1 \cdot R_{общ_1}$

т.к. последовательное соединение, то $R_{общ_1} = r + R_1$

① $\mathcal{E} = 0{,}18\,(R_1 + r)$ → $R_1 = \frac{\mathcal{E}}{0{,}18} - r$

② $\mathcal{E} = 0{,}21\,(R_2 + r)$ → $R_2 = \frac{\mathcal{E}}{0{,}21} - r$

③ $\mathcal{E} = 0{,}14\,(R_1 + R_2 + r)$

$$\mathcal{E} = 0{,}14\left(\frac{\mathcal{E}}{0{,}18} + \frac{\mathcal{E}}{0{,}21} - 2r + r\right) = \frac{0{,}14\,\mathcal{E}}{0{,}18} + \frac{0{,}14\,\mathcal{E}}{0{,}21} - r \cdot 0{,}14$$

$$\mathcal{E} = \frac{7}{9}\mathcal{E} + \frac{2}{3}\mathcal{E} - r \cdot 0{,}14 \longrightarrow 0{,}14r = \frac{7}{9}\mathcal{E} + \frac{6}{9}\mathcal{E} - \mathcal{E}$$

$$r = \frac{\frac{4}{9}\mathcal{E}}{0{,}14} = \frac{4\,\mathcal{E} \cdot 100}{9 \cdot 14} = \frac{200}{63}\mathcal{E}$$

④ $\mathcal{E} = I \cdot r = I \cdot \frac{200}{63}\mathcal{E}$

$$I = \frac{63}{200} = \frac{31{,}5}{100} = 0{,}315 \text{ A}$$

Ответ: 0,315 A ④ (4б)

нет конечного ф-ла!
(вычислено 5б)

ШИФР: 760
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24

Вариант № _____

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

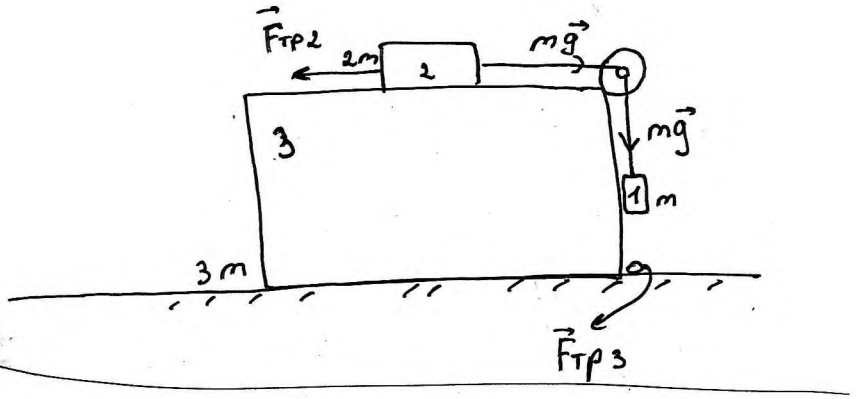
1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№3

μ = коэффициент трения тела массой 3m и поверхностью.

Тело 1 (массой m) тянет тело 2 (2m) с силой $F = mg$, т.к. верёвка нерастяжимая.

На тело 2 действует сила $F_{тр2}$, которая направлена противоположно силе $F = mg$, а значит эта же сила трения действует и на тело 3 (массой 3m), а на само тело 3 действует сила трения между телом и поверхностью ($F_{тр3}$). ⇒ Чтобы система была стабильна, то $F = mg = F_{тр2}$, а $F_{тр2} = F_{тр3}$, т.е. $F_{тр3} = \mu \cdot 3mg = F = mg$



$\mu \cdot 3mg = mg \longrightarrow \mu = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

13