532500
Регистрационный номер

Фамилия Емелова
Имя Екатерина
Отчество Алексеевна

203
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

**Вариант 3**

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.
2. Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением $x$.
3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+a/2$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 203
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по математике

Дата 06.04.2024

Вариант № 3

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

*ФИО и рег. номер не указывать!*

**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ИТОГО | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | | | | 1 | |

№2.

$3x-1 = [\lg(10^{-y}\cdot 4^x)] - [\lg[10^{3y}\cdot 4^x]]$

Преобразуем составляющие левой части ур-ния:

① $\lg(10^{-y}\cdot 4^x) = \lg 10^{-y} + \lg 4^x = -y + x\cdot\lg 4$ +

② $\lg[10^{3y}\cdot 4^x]$: т.к. $x, y$ - ~~ц.ч.~~ целые числа по условию $10^{3y}\cdot 4^x$ - целое число => ~~во~~ $\lg[10^{3y}\cdot 4^x] = \lg(10^{3y}\cdot 4^x) =$
$= \lg 10^{3y} + \lg 4^x = 3y + x\cdot\lg 4$

x и y т.б. перпу

③ $3x-1 = [-y + x\cdot\lg 4] - [3y + x\cdot\lg 4]$

т.к. $y$ - ц.ч., то его можно вынести из [ ]

$3x-1 = -y + \cancel{[x\cdot\lg 4]} - 3y - \cancel{[x\cdot\lg 4]}$

$3x-1 = -4y$

④ ОДЗ:

$\begin{cases} 10^{-y}\cdot 4^x > 0 \\ 10^{3y}\cdot 4^x > 0 \end{cases}$ ~~$\begin{cases} x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R} \\ x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$~~ $x\neq 0;\ y\neq 0$ $x, y\in\mathbb{R}$

0

⑤ $x = \dfrac{-4y+1}{3}$

$-4y+1 \vdots 3$, $-4y+1$ - максимально ~~минимальн~~

$y<0$

$= \left(\frac{10^n-1}{3};\ -\frac{10^n}{4}+1\right)$, $n$ - наиб. полож. ?

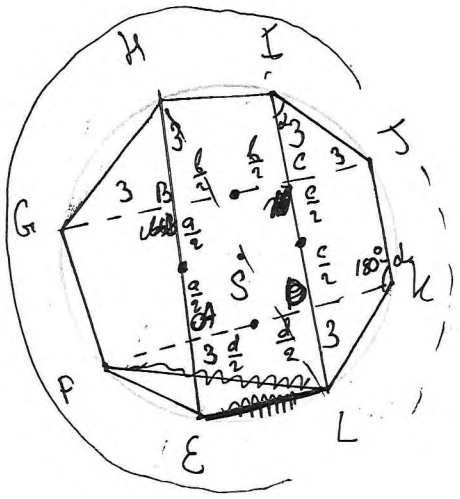
Методом подбора $(x;y)$ при $x$-max $= \left(10^n;\ \frac{1-10^n}{4}\right)$, $n$ - наиб. полож.

Ответ: $\left(\frac{10^n-1}{3};\ 1-\frac{10^n}{4}\right)$, $n\in\mathbb{N}$,

Лист 1 из 1

№3.

1. Разделим 8-угольник на 4-угольники:




все из получившихся 4-угольников вписаны в ту же окр-ть с $R=\sqrt{29}$ и ц. S

$\Rightarrow \cancel{\angle I + \angle K = \angle J + \angle L = \angle H + \angle}$

$\Rightarrow \angle JIC + \angle JKL = 180°$

б. Дуга $JL = 360° - 2\alpha$

м. дуга $JL = 360° - 360° + 2\alpha = 2\alpha$

$S_{8\text{-уг}} = 4 S_{\triangle EHL}$

$S_{\triangle EHL} = \frac{HE \cdot EL \cdot EL}{4R} = \frac{(6+a)\cdot 2R \cdot d}{4R} = \frac{(6+a)\cdot d}{2}$, $a = AB$, $d = AD$

$S_{8\text{-уг}} = 7 S_{ABCD}$

$S_{8\text{-уг}} = \frac{P_{8\text{-уг}} \cdot \sqrt{29}}{2}$

$P_{8\text{уг}} = 8 \cdot \sqrt{9+9} = 8\sqrt{18}$

$S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{18}\cdot\sqrt{29}}{2\cdot 7} = \frac{4\sqrt{513}}{7}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{513}}{7}$

$8_{8\text{уг}} = 7 S_{ABCD}$

$S_{ABCD} = \frac{(6+a)d}{14}$; $\begin{cases} a = d \\ R = 3 + \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} = \sqrt{29} - 3 \\ a = 2\sqrt{29} - 6 \end{cases}$

$S_{ABCD} = \frac{(6+2\sqrt{29}-6)\cdot(2\sqrt{29}-6)}{14} = \frac{2\sqrt{29}}{14}\cdot(2\sqrt{29}-6) = \frac{116-12\sqrt{29}}{14}$

0

Ответ: $\frac{58-6\sqrt{29}}{7}$

№1.

Чтобы условие выполнялось, необходимо, чтобы удвоенное число было равно своему квадрату, т.е. $2a = a^2$, отсюда $a = 2$ (т.к. $a > 0$ по усл.)

если числа будут разные, равенство не выполнится.

4 12 4 140 ?

$a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4$ $a_5$

не удовл.

1

если числа будут одинаковые, но отличные от 2.

$a_1$ $a_2$ $a_3$

3 3 6 3 33

не удовл.

$\Rightarrow$ произведение $a_{50} = 2^{50}$ Ответ: $2^{50}$.

$2^{50} = (2^{10})^5 =$

592500
Регистрационный номер

Фамилия Екимова
Имя Екатерина
Отчество Алексеевна

685
(не заполнять)

Подпись

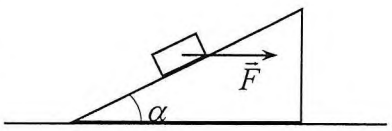
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

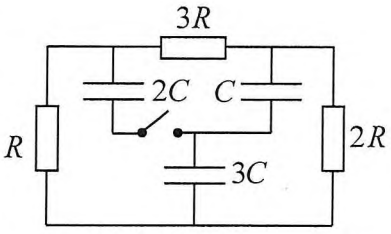
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

**1.** В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м$^3$, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

**2.** На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании $\alpha$. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу $F$. Трение между телом и клином отсутствует.




**3.** Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов $R$, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов $C$, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом $q$ (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты $Q_R$, $Q_{2R}$ и $Q_{3R}$ выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?




Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 685
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ИТОГО | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 0 | | | | 7 | |

№ 1

$V_{газа} = 20 л = 20 \cdot 10^{-3} м^3$

$V_{жид.\,N_2} = 0{,}5 л = 0{,}5 \cdot 10^{-3} м^3$

$T_k = 20°C = 293 K$

$P_m = 10^6$ Па

1) ~~разорв~~ ~~$P_{N_2}$~~ $P_{N_2}$ - ?

2) $T'$ - ?

1)

① $\nu_{N_2} = \frac{m(г)}{M(г/моль)}$

$m = \rho_{N_2} \cdot V_{жид} = 800 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 400 \cdot 10^{-3} = 0{,}4 (кг) = 400 (г)$

$\nu = \frac{400}{28} = \frac{100}{7} \approx 14{,}28 \approx 14{,}3$ (моль)

② Ур-ние Менделеева-Клапейрона:

$pV = \nu RT$

$p = \frac{\nu R T_k}{V_{газа}}$ $\quad p = \frac{14{,}3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{20 \cdot 10^{-3}} = \frac{143 \cdot 831 \cdot 293}{20} =$

$\approx 1740403{,}45$ (Па) $\approx 1{,}7$ МПа, $1{,}7$ МПа $> 1$ МПа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сосуд разорвёт

2) ① По ур-нию Менделеева-Клапейрона:

$P_m V_{газа} = \nu R T'$

$T' = \frac{P_m \cdot V_{газа}}{\nu R} = \frac{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{14{,}3 \cdot 8{,}31} = \frac{20000}{14{,}3 \cdot 8{,}31} \approx 168$ K

5

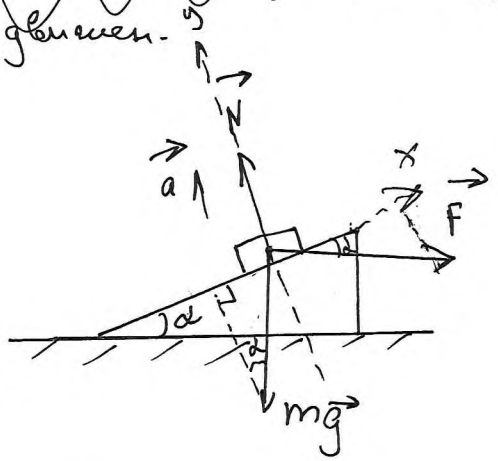
Ответ: 1) да; 2) 168 K.

№ 2.

Лист 1 из 2

1. Для того, чтобы ускорение тела было направлено перп-но поверхности, результирующая всех сил, действующих на тело, должна быть направлена ⊥ перп-но поверхности.

2. Если трения между клином и телом нет, клин в процессе приложения силы $\vec{F}$ неподвижен.




По II З.Н.:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$$

Ox: $0 =$

Но тогда в пр-ции на Ox II З.Н. mg,

По II З.Н.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$$

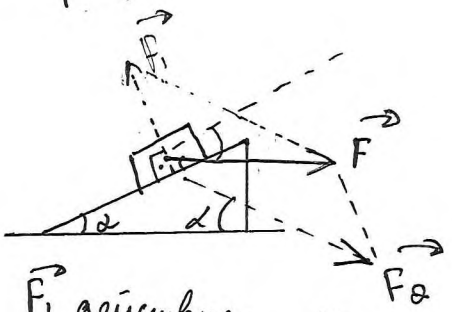
Ox: $0 = -mg\cdot\sin\alpha + F\cdot\cos\alpha$

$$F = \frac{mg\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Oy: $ma = N - mg\cdot\cos\alpha - F\sin\alpha$

$$N = ma + mg\cdot\cos\alpha + \frac{mg\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = m\left(a + g\cdot\cos\alpha + g\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

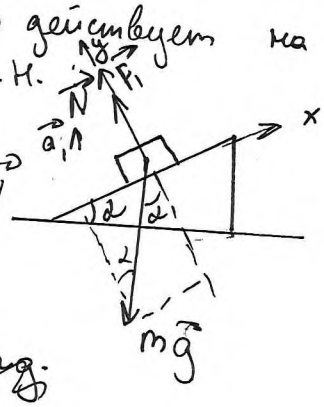
2. Разложим $\vec{F}$:




$\vec{F_1}$ действует на тело, $\vec{F_2}$ действует на клин.

① Тело по II З.Н.

$$m\vec{a_1} = \vec{F_1} + m\vec{g} + \vec{N}$$




~~Вх: 0 = пад.~~

$N = m(a_1 + g\cdot\cos\alpha)$

Oy: $ma_1 = N - mg\cdot\cos\alpha$

~~$F_1 = N - mg\cdot\cos\alpha$~~ ~~$F_1 = ma + mg\cos\alpha - N$~~

ШИФР: 685
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

Площадка написания: ИЯЦ МИФИ

*ФИО и рег. номер не указывать!*

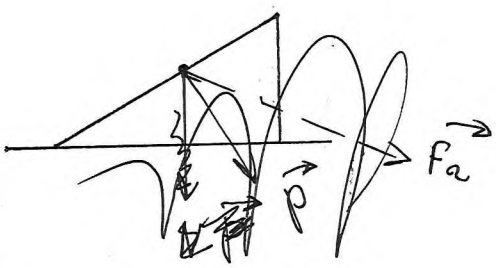
**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

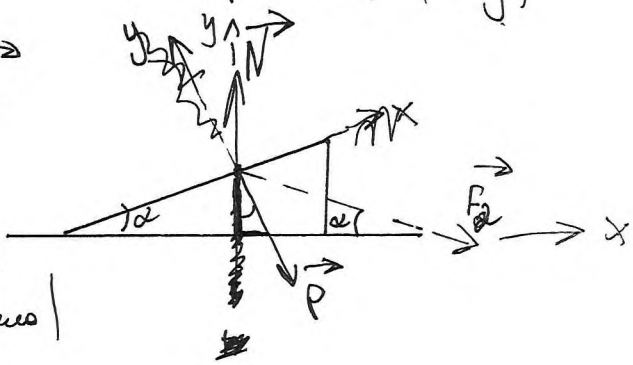
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ИТОГО | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

② Клин по 3.Н.!

т.к. клин невесомый,

$|\vec{N}_s| (|\vec{P}_{тела}|) = |m\vec{g}|$




$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F_a}$

$|\vec{N}_{стержня}| = |\vec{N}_{тело}|$

$Oy$: $-ma\cdot\sin\alpha = N - P\cdot\cos\alpha$

$N = mg\cdot\cos\alpha - F_2$

$Ox$: $ma\cdot\cos\alpha =$

$Oy$: $-ma\cdot\sin\alpha =$

$Ox$: $ma_2\cos\alpha = P\cdot\sin\alpha$

$ma_2\cos\alpha = mg\cdot\sin\alpha$

$a_2 = g\cdot tg\alpha$

$Oy$: $-ma_2\sin\alpha = N - P\cdot\cos\alpha$

$N = mg\cdot\cos\alpha - ma_2\sin\alpha$

$N = mg\ m\left(g\cdot\cos\alpha - \frac{g\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$m(a_1+g)\cdot\cos\alpha = m\left(g\cdot\cos\alpha - \frac{g\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$(a_1+g)\cdot\cos\alpha = g\left(\cos\alpha - \frac{g\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$a_1\cdot\cos\alpha + g\cdot\cos\alpha = g\cdot\cos\alpha - \frac{g^2\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

$a_1 = \frac{-g^2\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -g^2\cdot tg^2\alpha$

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

$F_1^2 = (ma_1)^2 = m^2\cdot g^4\cdot tg^4\alpha$

$F_2^2 = (ma_2)^2 = m^2\cdot g^2\cdot tg^2\alpha$

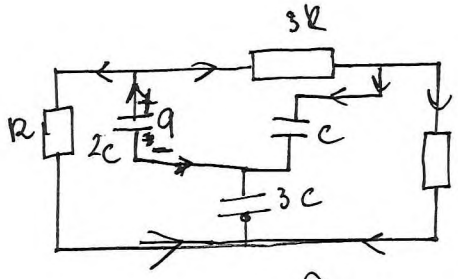
$F = \sqrt{m^2(g^4\cdot tg^4\alpha + g^2\cdot tg^2\alpha)} = m\sqrt{g^2 tg^2\alpha(g^2 tg^2\alpha + 1)} =$

$= mg\cdot tg\alpha\cdot\sqrt{g^2\cdot tg^2\alpha + 1}$ (2)

Ответ: $mg\cdot tg\alpha\cdot\sqrt{g^2\cdot tg^2\alpha+1}$.

$N = 3$.

1) Через C ток не идет




① $q = CU$

② $Q = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ для конденсаторов

③ $I = \dot{q}$

④ $Q = IUt = \frac{U^2}{R}t$ - для резисторов

⑤ $\frac{q^2}{4C}$

1. U на 3R, 2C, C одинаковое

$U = \frac{2C}{q}$

$q_C = \frac{2C\cdot C}{q} = \frac{2C^2}{q}$

$Q_C = \frac{2C^2}{q}$

$Q_{3R} = Q_{2C} = Q_C = \frac{2C}{q}\cdot\frac{2}{q}\cdot\frac{4C^2}{3R}$