512869
Регистрационный номер

Фамилия Калугин
Имя Михаил
Отчество Павлович

397
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.

3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 397
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯЧ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
0	1	2				3	

2. $tg\alpha\cdot(x-tg\alpha)^2+ctg\alpha\cdot(x-ctg\alpha)^2=0$

$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$, заменим $ctg\alpha$ в уравнении.

$tg\alpha\cdot(x-tg\alpha)^2+\frac{1}{tg\alpha}\cdot(x-\frac{1}{tg\alpha})^2=0$

$tg\alpha(x^2-2tg\alpha x+tg^2\alpha)+\frac{1}{tg\alpha}\cdot(x^2-\frac{2x}{tg\alpha}+\frac{1}{tg^2\alpha})=0$

$tg\alpha x^2-2tg^2\alpha x+tg^3\alpha+\frac{x^2}{tg\alpha}-\frac{2x}{tg^2\alpha}+\frac{1}{tg^3\alpha}=0$

$\frac{x^2(tg^2\alpha+1)}{tg\alpha}-\frac{2x(tg^4\alpha+1)}{tg^2\alpha}+\frac{tg^6\alpha+1}{tg^3\alpha}=0\ |\cdot tg^3\alpha$

$x^2(tg^4\alpha+tg^2\alpha)-2x(tg^5\alpha+tg\alpha)+(tg^6+1)=0$

Уравнение (A) должно иметь одно решение $\Rightarrow$ [D=0, A=0]

$D=(-2tg^5\alpha)+(-2tg\alpha))^2-4\cdot(tg^4\alpha+tg^2\alpha)\cdot(tg^6+1)$

$4tg^{10}\alpha+4tg^2\alpha^4-(4tg^4\alpha+4tg^2\alpha)\cdot(tg^6+1)=0$

$4tg^{10}\alpha+4tg^2\alpha-4tg^{10}\alpha-4tg^4\alpha-4tg^2\alpha-4tg^2\alpha+8tg^6\alpha=0$

$8tg^6\alpha-4tg^4-4tg^2\alpha=0$

$4tg^4\alpha(2tg^4\alpha-1)-4tg^4\alpha(4tg^4\alpha)=0$

$4tg^4\alpha(2tg^4\alpha-1-4tg^4\alpha)=0$

$4tg^4\alpha(-2tg^4\alpha-1)=0$

$4tg^4\alpha=0$

$tg^4\alpha=0$

$tg\alpha=0$

$\alpha=\{0;180;360\}$

$-2tg^4\alpha-1=0$

$2tg^4\alpha=-1$

$tg^4\alpha=-\frac{1}{2}$

$tg\alpha=\pm\sqrt[4]{-\frac{1}{2}}$ - нет корней.

~~Ответ: $\alpha_1=0°, \alpha_2=180°, \alpha_3=360°$~~

, но $ctg\alpha$ не существует при этих значениях α и $\frac{1}{tg\alpha}; tg\alpha\neq 0$

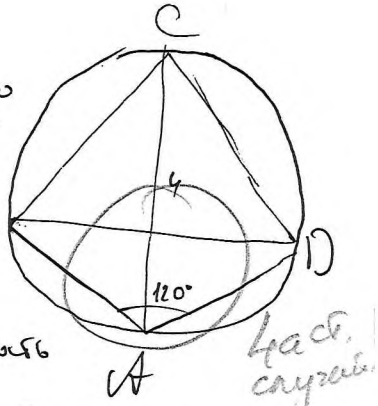
=> таких α не существует.

Ответ: ни при каких α.

(1)

3. $\angle BAD=120°$, следовательно градусная мера дуги $BCD=\angle BAD\cdot 2=120°\cdot 2=240°$

Т.к. $\triangle BCD$ - равнобедренный то градусные меры дуг BC и CD равны $\frac{\cup BD}{2}=\frac{240°}{2}=120°$. Т.к. $\cup BC=\cup CD=\cup BAD$, можно сделать вывод что $\triangle BCD$ - равносторонний и $BC=BD=CD$.



Частный случай

CA проходит через центр окружности и является диаметром => $\angle CDA=\angle CBA=90°$. В прямоуг. треуг. $\triangle ACD$ $\angle CAD=\frac{120°}{2}=60°$ -> $\angle ACD=30°$ => $AD=\frac{CA}{2}=\frac{4}{2}=2$ - по свойству прямоуг. треуг. По теореме Пифагора $CD=\sqrt{CA^2-AD^2}=$

$=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. $\triangle BCA=\triangle CAD$ по двум сторонам ($BC=CD$, BD - общ.) и углу ($\angle CBA=\angle CDA$) =>

$=> S_{ABCD}=2S_{\triangle ACD}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

(2)

512869
Регистрационный номер

Фамилия Калугин
Имя Михаил
Отчество Павлович

757
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

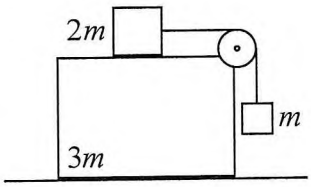
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0{,}18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0{,}21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0{,}14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 757
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Юниор»

Работа по физике

Дата 06.04.24.

Вариант № ____

Площадка написания: ИНЯЧ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

(2) По закону ома ~~для~~ для последовательного соединения сопротивления в схемах соответственно равны:

$R_1 = r + R_1'$; $R_2 = r + R_2'$; $R_3 = r + R_1' + R_2'$; $R_4 = r$, где r - сопротивление соединения, а R_1' и R_2' - сопротивления резисторов.

$R_1' = \frac{U}{I_1}$; $R_2' = \frac{U}{I_2}$; $U = IR = const$. Свяжем сопротивление цепей 2 и 3 через напряжение.

$I_2 \cdot (r + R_2') = I_3 \cdot (r + R_1' + R_2')$

$I_2 r + I_2 R_2' = I_3 r + I_3 R_1' + I_3 R_2'$

$I_2 r + I_2 U = I_3 r + \frac{I_3 U}{I_1} + \frac{I_3 U}{I_2}$

$r(I_2 - I_3) = \frac{I_3 U}{I_1} + \frac{I_3 U}{I_2} - U$

$r = \left(\frac{I_3 r}{I_1} + \frac{I_3 U}{I_2} - U\right)\left(\frac{1}{I_2 - I_3}\right)$

$r = \left(\frac{100 \cdot 11 \cdot U}{100 \cdot 11} + \frac{100 \cdot 11 \cdot U}{100 \cdot 21} - U\right)\left(\frac{100}{7}\right)$

$r = \frac{7 \cdot U \cdot 100}{9 \cdot 11} + \frac{100 \cdot 2 \cdot U}{3 \cdot 7} - \frac{U \cdot 100}{7}$

$$r = \frac{700\,Ом + 60\,Ом - 900\,Ом}{63}$$

$$r = \frac{400\,Ом}{63}$$

$R_4^* = r$; $I_4 = \frac{U}{R_4} = \frac{U \cdot 63}{400 \cdot U} = \frac{63}{400} = \frac{1575}{10000} = 0{,}1575\,А$

Ответ: 0,1575 А. (3)

(1) Дано:

$V = 20\,л = 2 \cdot 10^{-2}\,м^3$

$V_0 = 0{,}5\,л = 5 \cdot 10^{-4}\,м^3$

$t = 20°C$

$p_m = 1 \cdot 10^6\,Па$

$p_A = 800\,кг/м^3$

$R = 8{,}31\,Дж/моль$

$\mu = 28\,г/моль = 28 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$

Найти: $P \geq p_m$ - ?

Решение:

$T = 273 + t = 273 + 20 = 293\,К$

$m_A = p_A \cdot V_0 = 800 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}4\,кг$

Применим уравнение Менделеева-Клапейрона:

$PV = \nu RT$

$P = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{0{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = \frac{2 \cdot 10^{1}\ 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-4}} = \frac{241483}{14 \cdot 10^{-2}}\,Па$

$p_m = 1 \cdot 10^6\,Па = \frac{10^4 \cdot 14}{14 \cdot 10^{-2}}\,Па = \frac{140000}{14 \cdot 10^{-2}}\,Па$.

Т.к. $0 < 14 \cdot 10^{-2} < 1{,}50$

$\frac{241483}{14 \cdot 10^{-2}} > \frac{140000}{14 \cdot 10^{-2}}$; $P > p_m \Rightarrow$ сосуд разорвется

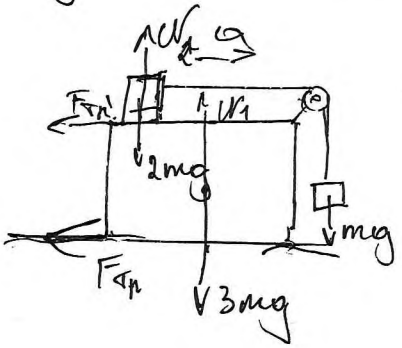
$\frac{mRT}{\mu V} \geq p_m$

$\frac{mRT}{\mu V} = p_m$; $T = \frac{p_m \mu V}{mR} = \frac{10^6 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 8{,}31 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^4 \cdot 28 \cdot 2}{4 \cdot 831} \approx$

$\approx 164{,}17\,К$

Ответ: Сосуд разорвется при температуре азота 164,17 К (5)

(3)



$F_{тр} = mg - F_{тр}$; $F_{тр} = N\mu$.

$N_1\mu = mg - N_2\mu$; $N = mg$

$3mg\mu = mg - 2mg\mu$

$5\mu = 1$

$\mu = 0{,}2$.

Ответ: $\mu_{min} = 0{,}2$. (1)