512706
Регистрационный номер

Фамилия Быков
Имя Антон
Отчество Павлович

196
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 3

Доказать единственность

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 196
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: ИИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	1	1				3	

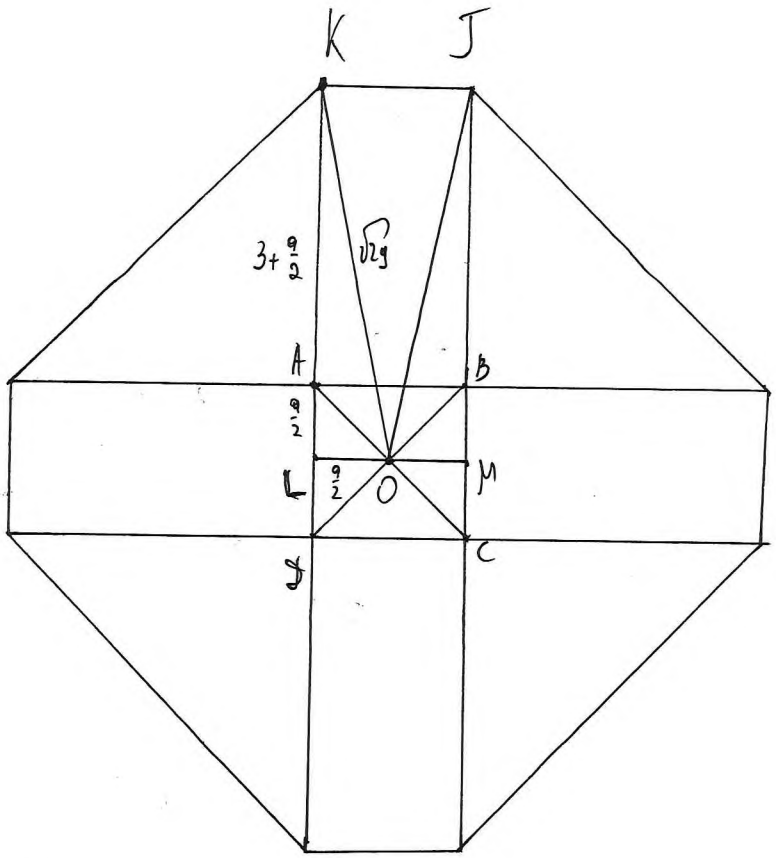
№3

1) Четырёхугольник ABCD не может быть произвольным, потому что искомый восьмиугольник может получиться не выпуклым, и следовательно, его нельзя будет вписать в окружность. При этом, чтобы описать именно окружность, а не, например, эллипс, также нужно, чтобы у ABCD были равными все стороны, значит, что ABCD – либо ромб, либо квадрат. Но вокруг восьмиугольника, который получится из ромба, описать окружность также не получится, значит ABCD – квадрат. не доказано

2) Таким образом получаем восьмиугольник, около которого можно описать окружность. Исходя из того, что ABCD квадрат, можно сделать вывод о том, что вершина окружности будет в месте пересечения диагоналей квадрата: $AC \cap BD = O \Rightarrow (O; R)$ – окр.
$OK = OJ = R = \sqrt{2}$.

3) Д-н.: в ABCD: LM – серединный перпендикуляр $\Rightarrow AL = LD = LO = \frac{9}{2}$ (по опр. серединного перпендикуляра и св-ву квадр.)

4) Рассмотрим $\triangle KLO$: $\angle KLO = 90°$ (LO – серединный перпендикуляр) $\Rightarrow \triangle KLO$ – п/у (по опр.)
$KL = KA + AL = 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 3 + 9$



по Т Пифагора: $KL^2 + LO^2 = KO^2$

$$(3+a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2$$

$$9 + 6a + a^2 + \frac{a^2}{4} = 29 \quad | \cdot 4$$

$$4a^2 + a^2 + 24a - 80 = 0$$

$$5a^2 + 24a - 80 = 0$$

$$D = 24^2 + 4 \cdot 80 \cdot 5 = 576 + 1600 = 2176$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-24 + \sqrt{2176}}{10} \quad a > 0 \\ a = \dfrac{-24 - \sqrt{2176}}{10} < 0 \Rightarrow \text{не удовл. усл. (сторона не м/б } < 0). \end{array}\right.$$

$$a > 0 \quad a = \frac{-24 + 8\sqrt{34}}{10}$$

$$S_{ABCD} = a^2 = \left(\frac{8\sqrt{34} - 24}{10}\right)^2 = 16$$

Ответ: 16.

ШИФР: 196
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2

$$3x-1=\left[\lg(10^{-y}\cdot 4^{x})\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$$

$$3x-1=\left[\lg\frac{4^{x}}{10^{y}}\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$$

$$3x-1=\left[\lg\frac{\cancel{4^{x}}}{10^{y}\cdot 10^{3y}\cdot \cancel{4^{x}}}\right]$$

$$3x-1=\left[\lg 10^{-4y}\right]$$

$$3x-1=-4y$$ не обосновано

$$3x+4y=1$$

$$x=\frac{1-4y}{3}$$

Чем больше y, тем больше x; $(x;y)\in$ целым $\Rightarrow$ например: $y=-2$, $x=3$; Проверка $4^3 \vee 10^6$, $4^3<10^6$ $\Rightarrow y<x$ не удовл. усл

$\Rightarrow y>x$.

$10^{3y}\cdot 4^{x}$ должно быть >0 $\Rightarrow \left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\neq 0$ $\Rightarrow 10^{3y}\cdot 4^{x}\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]=10^{3y}\cdot 4^{x}$

Ограничение: $10^{3y}\cdot 4^{x}\geq 1$

$4^{x}\geq 10^{-3y}$

+

Лист 2 из 2

$y = 1$: $x = -1$

Проверка: $4^{-1} \vee 10^{-3}$

$4^{-1} > 10^{-3}$ => удовлетворяет условию и пара $(-1; 1)$ подходит

$y = 4$; $x = -5$ — в данном случае все остальные „иксы" будут меньше -1, поэтому берём $x = -1$ как максимальное.

Ответ: $(-1; 1)$.

1

№1

Так как по условию нет ограничений на то, чтобы числа ~~повторялись~~ повторялись, можно взять круг, состоящий только из двоек:

$2^2 = 2 + 2$ — удовл. условиям задачи. Тогда произведение всех чисел круга равно 2^{50}.

Докажем единственность данного круга: Если пробовать составить круг из произвольных чисел, то ~~[illegible]~~ данный круг не обойдётся без такой цифры, как 1 ~~[illegible]~~ (для выполнения условия круга), но данные цифры ~~сведут задачу~~ не смогут продолжить или замкнуть круг, так как, например, из двух положительных чисел нельзя получить сумму квадрата единицы:

$1^2 \neq a + b$, где $(a; b) > 0$

~~Так же в данном круге должно будет обходиться правило, что $a_1 + a_2 = a_{50}$, где a_1 — первый член круга, a_2 — второй член круга, a_{50} — последний член круга.~~

Ответ: 2^{50}.

1

512706
Регистрационный номер

Фамилия Бычков
Имя Антон
Отчество Ковалевич

679
(не заполнять)

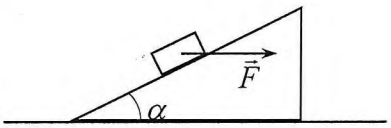
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

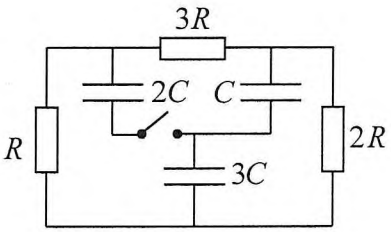
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует. m - масса тела



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 679
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

5	5	2		12	Si

№1

Дано:

$V = 20 \cdot 10^{-3}\ м^3$

$V_0 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\ м^3$

$t = 293\ K$

$p_m = 10^6\ Па$

$\rho = 800\ \frac{кг}{м^3}$

$\mu = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

$R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot K}$

Решение:

$m = \rho \cdot V_0$

$\nu = \frac{\rho \cdot V_0}{\mu}$

по з. Менделеева-Клапейрона:

$pV = \nu R t$

$p = \frac{\nu R t}{V} = \frac{\rho V_0 R t}{\mu V} = \frac{800 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 293 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}$

$\approx 1{,}7 \cdot 10^6\ Па \Rightarrow$ при температуре t сосуд уже разорвётся.

$p_m V = \nu R T_m$

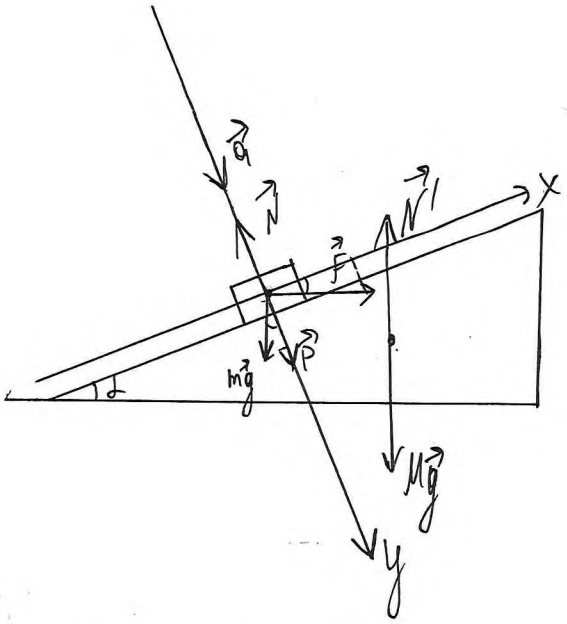
$T_m = \frac{p_m V}{\nu R} = \frac{p_m V \cdot \mu}{\rho V_0 R} = \frac{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} =$

$= \frac{28 \cdot 20000}{400 \cdot 8{,}31} = \frac{7 \cdot 20000}{831} \approx 168\ K$

Ответ: 168 K.

5

№2



по 2ЗН:

для тела массой m:

$X: mg\sin\alpha = F\cos\alpha$

$y: mg\cos\alpha + F\sin\alpha - N = ma$

$F = mg\,tg\alpha$

5

Ответ: $mg\,tg\alpha$.

№3

Заряд q равномерно поделится на 3 конденсатора: $q_C = \frac{q}{6}$

Энергия конденсатора 2C: $W_{2C} = \frac{q_{2C}^2}{2C} = \frac{4q^2}{72C} = \frac{2q^2}{36C} = \frac{q^2}{18C}$ $q_{2C} = \frac{2q}{6}$ +

$q_{3C} = \frac{3q}{6}$

Энергия конденсатора C: $W_C = \frac{q_C^2}{C} = \frac{q^2}{36C}$

Энергия конденсатора 3C: $W_{3C} = \frac{q_{3C}^2}{3C} = \frac{9q^2}{36 \cdot 3C} = \frac{q^2}{12C}$

Итого: на резисторе R выделится половина энергий конденсаторов 2C и 3C:

$Q_R = \frac{W_{2C}}{2} + \frac{W_{3C}}{2} = \frac{q^2 \cdot 2}{36C} + \frac{q^2 \cdot 3}{24C} = \frac{5q^2}{72C} = \frac{5}{72} \cdot \frac{q^2}{C}$ 2

на резисторе 2R выделится половина энергий конденсаторов 3C и C:

$Q_{2R} = \frac{W_{3C}}{2} + \frac{W_C}{2} = \frac{q^2 \cdot 3}{24C} + \frac{q^2}{72C} = \frac{4}{72} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{18} \cdot \frac{q^2}{C}$

на резисторе 3R выделится половина энергий конденсаторов 2C и C:

$Q_{3R} = \frac{W_{2C}}{2} + \frac{W_C}{2} = \frac{q^2 \cdot 2}{36C} + \frac{q^2}{72C} = \frac{3}{72} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{24} \cdot \frac{q^2}{C}$

Ответ: $Q_R = \frac{5}{72} \cdot \frac{q^2}{C}$; $Q_{2R} = \frac{1}{18} \cdot \frac{q^2}{C}$; $Q_{3R} = \frac{1}{24} \cdot \frac{q^2}{C}$ —