512649
Регистрационный номер

Фамилия Елисеев
Имя Сергей
Отчество Алексеевич

396
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 396
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юный"

Работа по математике

Дата 06.04.2024

Вариант № 4

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
0	1	0				1	

Задание 2. $\operatorname{tg}\alpha(x-\operatorname{tg}\alpha)^2+\operatorname{ctg}\alpha(x-\operatorname{ctg}\alpha)^2=0$

$\operatorname{tg}\alpha(x^2-2x\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)+\operatorname{ctg}\alpha(x^2-2x\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)=0$

$x^2\operatorname{tg}\alpha-2x\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^3\alpha+x^2\operatorname{ctg}\alpha-2x\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha=0$

$x^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)-2x(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)+\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha=0$

Уравнение имеет 1 решение при $D=0$ или ? $=0$!

$D=4(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2-4\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha)=0$

$0=4(\operatorname{tg}^4\alpha+2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha)-4(\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha)$

$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha=1$; $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^3\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha$

$8-4\operatorname{ctg}^2\alpha-4\operatorname{tg}^2\alpha=0$

$4-\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=0$ ⟹ $4\operatorname{tg}^2\alpha-1-\operatorname{tg}^4\alpha=0$

$4-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=0$ ⟹ Замена $\operatorname{tg}^2\alpha=t$

$\operatorname{tg}\alpha\neq 0$

$\alpha\neq \pi n$

$4t-1-t^2=0$ ✓

$t^2-4t+1=0$

$t=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$\operatorname{tg}^2\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ Ответ:

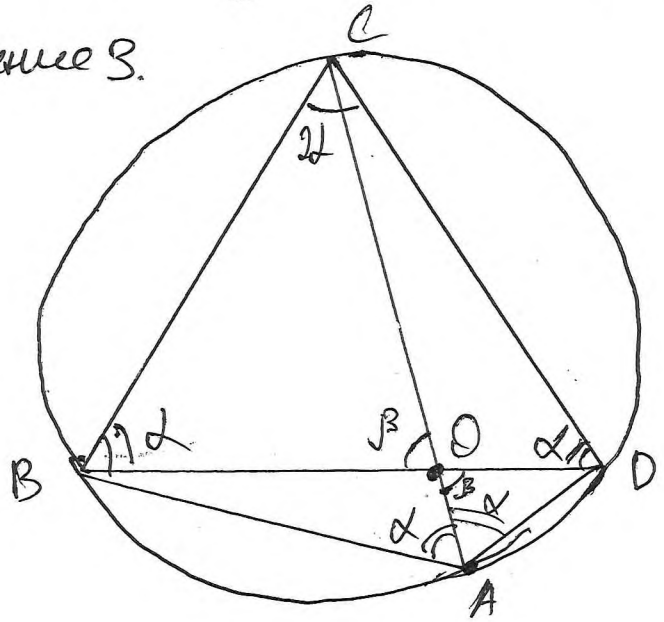
$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) + \pi n, \; n \in Z$

$\alpha_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2-\sqrt{3}}) + \pi n, \; n \in Z$

$\alpha_3 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2+\sqrt{3}}) + \pi n, \; n \in Z = -\operatorname{arctg}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$

$\alpha_4 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2-\sqrt{3}}) + \pi n, \; n \in Z = -\operatorname{arctg}(\sqrt{2-\sqrt{3}})$ (1)

Задание 3.



$\triangle BCD$ — р/б

$\angle BAD = 120°$

$BC = CD$

$AC = 4$

$S_{ABCD} - ?$

$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\beta$ Обозначим за угол $\alpha = \angle CDB$, тогда

$\angle CAB = \alpha$ (т.к. вис. углы с дугой BC)

$\angle CBD = \alpha$ ($\triangle BCD$ — р/б)

Аналогично с дугой CD $\angle CAD = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 2\alpha = 120°$ (по усл.)

AO — бис-са $\triangle BDA \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{OD}{AD}$

$\alpha = \frac{120}{2} = 60°$

Если $\alpha = \frac{120}{2} = 60° \Rightarrow \triangle BCD$ — равносторонний

$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot AB}{2} \cdot \sin\alpha + \frac{AC \cdot AD}{2} \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{AC}{2} \cdot \sin\alpha \, (AB + AD) = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\beta \quad \frac{AB + AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha}$

$(AB + AD) \cdot \sin\alpha = BD \cdot \sin\beta \quad \frac{BD}{\sin\alpha} =$

ШИФР: 396
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по математике

Дата 06.04.2024

Вариант № 4

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Задание 1.

2301 — 2400

?0

512649
Регистрационный номер

Фамилия Елисеев
Имя Сергей
Отчество Алексеевич

756
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

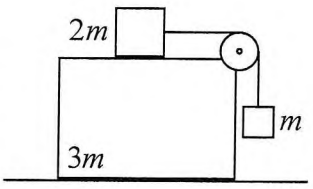
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0{,}18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0{,}21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0{,}14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 756
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024.

Вариант № _____

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Задание 1.

Дано:

$V = 20л = 0{,}02м^3$

$V_0 = 0{,}5л = 0{,}0005м^3$

$t = 20°C = 293$ К

$p_м = 1 \cdot 10^6$ Па

$\rho = 800 \frac{кг}{м^3}$

$\mu = 0{,}028 \frac{кг}{моль}$

$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot ос}$

$T_x - ?$

Решение: Уравнение состояния идеал. газа:

$pV = \nu RT$

$pV = \frac{m}{\mu} RT$

если $p \geq p_м$, то сосуд разорвёт.

Плотность в-ва: $\rho = \frac{m}{V_0} \Rightarrow m = \rho \cdot V_0$

$pV = \frac{\rho V_0}{\mu} RT$

$\boxed{p = \frac{\rho V_0 RT}{\mu V}} = \frac{800 \cdot 0{,}0005 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{0{,}028 \cdot 0{,}02} =$

$= \frac{8 \cdot 0{,}05 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 2} \cdot 10^5 = \frac{0{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 2} 10^5 = \frac{0{,}1 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{14} \cdot 10^5$

$= \frac{243{,}483}{14} \cdot 10^5$ Па $> 10^6$ на, сосуд разорвётся

$\boxed{T = \frac{pMV}{\rho V_0 R}} = \frac{10^6 \cdot 0{,}028 \cdot 0{,}02}{800 \cdot 0{,}0005 \cdot 8{,}31} = \frac{28 \cdot 20}{8 \cdot 0{,}05 \cdot 8{,}31} = \frac{560}{0{,}4 \cdot 8{,}31} =$

$= \frac{1400}{0{,}831} \approx 166$ К

Ответ: разорвет сосуд, $T = \frac{pMV}{\rho V_0 R} \approx 166$ К

55

Задание 2.

Дано:

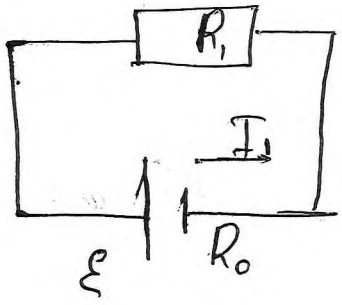
$I_1 = 0{,}18$ А

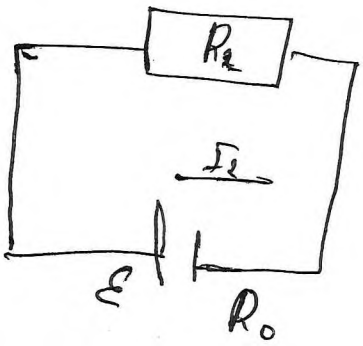
$I_2 = 0{,}21$ А

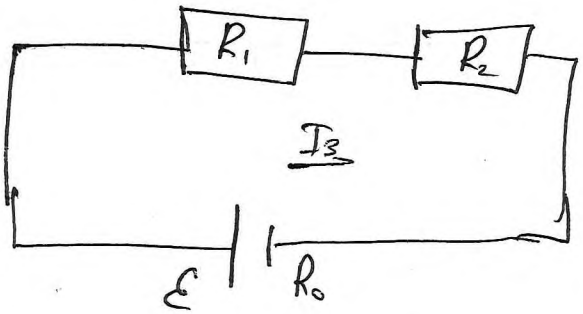
$I_3 = 0{,}14$ А

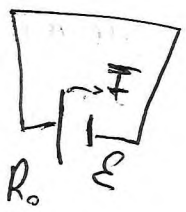
$I - ?$

Решение:

1) 

2) 

3) 

4) 

Закон Ома для 1 случая, 2 случ., 3 случ., 4 случ.:

1) $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0}$ 2) $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0}$ 3) $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_0}$ 4) $I = \frac{\mathcal{E}}{R_0}$

При последовательном подключении сопротивления складываются.

$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I_1} - R_0$; $R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I_2} - R_0$

$$R_0 = \frac{\mathcal{E}}{I_3} - R_1 - R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I_3} - \frac{\mathcal{E}}{I_1} + R_0 - \frac{\mathcal{E}}{I_2} + R_0$$

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{I_3} - \frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} + R_0$$

$$R_0 = \frac{\mathcal{E}}{I_1} + \frac{\mathcal{E}}{I_2} - \frac{\mathcal{E}}{I_3} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}} = \frac{1}{\frac{100}{18} + \frac{100}{21} + \frac{100}{14}} = \frac{18 \cdot 21 \cdot 14}{100(21 \cdot 14 + 18 \cdot 14 - 18 \cdot 21)} \approx$$

$$\approx \frac{5292}{16800} \approx 0{,}3 \text{ А}$$

Ответ: $I = \frac{1}{\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}} \approx 0{,}3$ А

ШИФР: 756
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

Площадка написания: МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

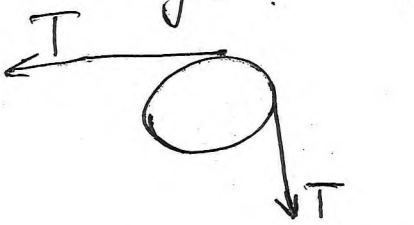
ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

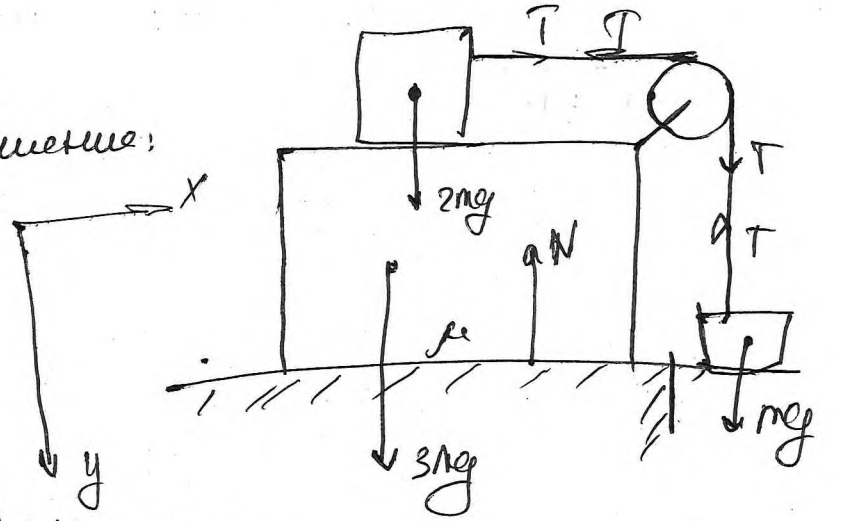
Задание 3.

$m, 2m, 3m$

$\mu - ?$



Решение:



Запишем 2 З. Ньютона:

$$\begin{cases} Oy: \ mg - T = ma \\ Ox: \ T = 2ma \end{cases} \Rightarrow mg = \frac{3}{2}T \Rightarrow T = \frac{2}{3}mg \quad (*)$$

$N = P = 2mg + 3mg + T$ — сумма всех верт. сил, действующих на большое тело.

$F_{тр} = \mu N = \mu mg\left(2 + 3 + \frac{2}{3}\right)$

пограничное состояние покоя выглядит так:

$F_{тр} = F_x$, где F_x — силы действующие на большое тело горизонтально

В данном случае

$F_x = T$

$$T = \mu mg\left(\frac{17}{3}\right) = \frac{2}{3}mg$$

$$17\mu mg = 2mg$$

$\mu = \frac{2}{17}$, при $\mu \geq \frac{2}{17}$ сила трения будет компенсировать силу горизонтальных внешних сил и бальше тело будет находится в состоянии покоя относительно стола.

Ответ: $\boxed{\mu \geq \frac{2}{17}.}$ при μ (+) 5