382

484093
Регистрационный номер

Фамилия Свистун
Имя Татьяна
Отчество Владимировна
Подпись

(не заполнять)

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\cos a\cdot(x-\cos a)^2+\operatorname{tg} a\cdot(x-\operatorname{tg} a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 382
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания:
НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	3	2				6	

№2 $\cos a(x-\cos a)^2 + \operatorname{tg} a(x-\operatorname{tg} a)^2 = 0$

$\cos a(x^2 - 2x\cos a + \cos^2 a) + \operatorname{tg} a(x^2 - 2x\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 a) = 0$

$x^2\cos a - 2x\cos^2 a + \cos^3 a + x^2\operatorname{tg} a - 2x\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^3 a = 0$

$x^2(\cos a + \operatorname{tg} a) - 2x(\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a) + \cos^3 a + \operatorname{tg}^3 a = 0$

$D = 4(\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a)^2 - 4(\cos a + \operatorname{tg} a)(\cos^3 a + \operatorname{tg}^3 a) =$

$= 4(\cos^4 a + 2\cos^2 a \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^4 a - \cos^4 a - \cos a \operatorname{tg}^3 a - \cos^3 a \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^4 a) =$

$= 4(2\cos^2 a \operatorname{tg}^2 a - \cos a \operatorname{tg}^3 a - \cos^3 a \operatorname{tg} a)$

Так как уравнение имеет единственное решение, то $D = 0$

$4(2\cos^2 a \operatorname{tg}^2 a - \cos a \operatorname{tg}^3 a - \cos^3 a \operatorname{tg} a) = 0 \mid :4$

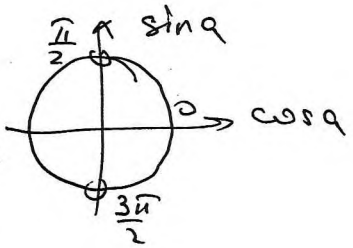
$\cos a \operatorname{tg} a(2\cos a \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^2 a - \cos^2 a) = 0$

$$\begin{cases} -\sin a(\operatorname{tg} a - \cos a)^2 = 0 \\ \cos a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin a = 0 \ (2) \\ \operatorname{tg} a = \cos a \ (3) \end{array}\right. \\ \cos a \neq 0 \ (1) \end{cases}$$

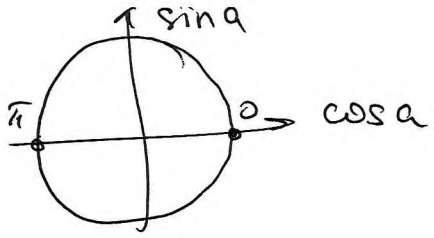
(1) $\cos a \neq 0$

$a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



(2) $\sin a = 0$

$a = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$



(3) $\operatorname{tg} a = \cos a$

$\frac{\sin a}{\cos a} = \cos a$

$\sin a = \cos^2 a$

$\sin a = 1 - \sin^2 a$

$\sin^2 a + \sin a - 1 = 0$

Замена: $\sin a = t \in [-1; 1]$

$D = 1 + 4 = 5$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \end{array}\right.$$

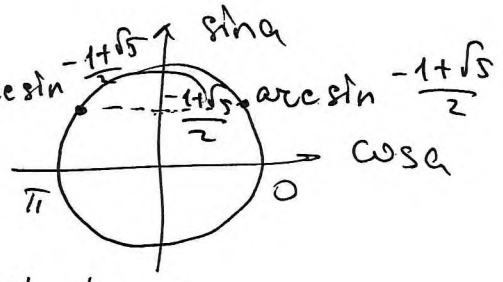
$\sqrt{3} > \sqrt{5} > \sqrt{4}$

$3 > \sqrt{5} > 2$

$2 > \sqrt{5} - 1 > 1$

$1 > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2}$

$\sin a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



$$\left[\begin{array}{l} a = \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ a = \pi - \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Собирая вместе все решения системы с учетом ограничений получаем ответ

Ответ: при $a = \pi k$, $a = \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a = \pi - \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

№3

3

Дано:

$\triangle BCD$, $CB = CD$.

$\triangle BCD$ вписан в окр.

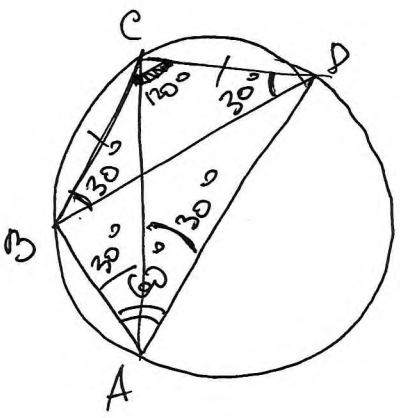
$A \in (\overset{\frown}{BD})$,

$\angle BAD = 60°$

$AC = 2\sqrt{3}$

Найти:

S_{ABCD} - ?



ШИФР: 382
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Юниор»

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Решение:

1) $ABCD$ вписан в окружность $\Rightarrow \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow$
$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 120^\circ$

2) $\angle CBD = \angle CDB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

~~3) $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ $BC = BD \Rightarrow ABCD$ - трапеция
$\angle CBD = \angle BDC \Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция~~

3) $\angle CAD = \angle CBD = 30^\circ$ - вписанные углы, опир. на одну дугу.
Аналогично
$\angle BAC = \angle BDC = 30^\circ$.

4) $\angle BAC + \angle BCD = 180^\circ$
$BC = CD \Rightarrow \angle BAC = \angle BDC$ $\Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция
$\Rightarrow AC = BD = 2 \cdot \sqrt{3}$

5) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$ (2)

№1.

Пусть для какого-то года a - частное от деления n на 100, b - остаток, $c = a + b$. То есть если $n : c$, то n - счастливый год.

Для 2300 года $a = 23$, $b = 0$, $c = 23$.

$2300 : 23 \Rightarrow$ 2300 – „счастливый год"

Для 2201 – 2299 годов $a = 22$, $b = n - 2200$,

$c = a + b = n - 2200 + 22 = n - 2178$.

Для четных лет с четно, для нечетных – нечетно.

Если год начало решился на c, то

$n = dc = d(n - 2178)$, ~~$dc \in \mathbb{N}$~~ $d \in \mathbb{Z}$

$n = dn - 2178d$

$n(d-1) = 2178d$

$$n = \frac{2178d}{d-1} = 2178 + \frac{2178}{d-1}$$

$2201 \leq n \leq 2299$, $n \in \mathbb{N}$

$$2201 \leq 2178 + \frac{2178}{d-1} \leq 2299$$

$$23 \leq \frac{2178}{d-1} \leq 121$$

$$\Rightarrow \; 93\tfrac{4}{94} \leq d \leq 12\tfrac{9}{121}$$

$\Rightarrow$ нет решений для d.

$\Rightarrow$ среди 2201 – 2299 годов нет „счастливых".

Ответ: 1 „счастливый" год

1

484093
Регистрационный номер

Фамилия Свистун
Имя Татьяна
Отчество Владимировна

749
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

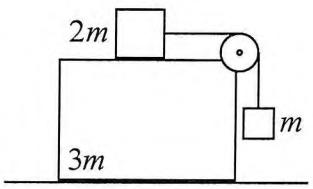
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0{,}18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0{,}21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0{,}14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 749
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2

Дано:
$I_1 = 0{,}18\ A$
$I_2 = 0{,}21\ A$
$I_3 = 0{,}14\ A$
Найти:
$I' - ?$

Решение:

По закону Ома для замкнутой цепи:

$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1}$ (1) r - сопротивление ЭДС

$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_2}$ (2) R_1, R_2 - сопротивление 1го и 2го резисторов

$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1+R_2}$ (3)

$I' = \frac{\mathcal{E}}{r}$ (4)

(1):(2): $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r+R_2}{r+R_1} = \frac{0{,}18\ A}{0{,}21\ A} = \frac{6}{7}$

$\Rightarrow 7r + 7R_2 = 6r + 6R_1$

$\Rightarrow r = 6R_1 - 7R_2$

(2):(3): $\frac{I_2}{I_3} = \frac{r+R_1+R_2}{r+R_2} = \frac{0{,}21\ A}{0{,}14\ A} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2r + 2R_1 + 2R_2 = 3r + 3R_2$

$\Rightarrow r = 2R_1 - R_2$

$6R_1 - 7R_2 = 2R_1 - R_2$

$4R_1 = 6R_2$

$R_1 = \frac{3}{2}R_2$

Тогда $r = 2R_1 - R_2 = 2\cdot\frac{3}{2}R_2 - R_2 = 2R_2$

$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{3R_2}$

$I' = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{2R_2}$

$\Rightarrow I' = \frac{2}{3}I_2 = \frac{2}{3}\cdot 0{,}21\,A = 0{,}14\,A$

Ответ: 0,14 A

3б

N1

Дано:

$V = 20\,л = 0{,}02\,м^3$

$V_0 = 0{,}5\,л = 0{,}0005\,м^3$

$t = 20^\circ C$

$p_m = 1\cdot 10^6\,Па$

$\rho = 800\,кг/м^3$

$\mu = 28\,г/моль$

$R = 8{,}31\,\frac{Дж}{моль\cdot град}$

Найти:

$t_1 - ?$

Решение:

Закон Менделеева - Клапейрона при $t = 20^\circ C$ ($T = 293\,K$)

$pV = \nu RT$

$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_0}{\mu}$

$pV = \frac{\rho V_0 RT}{\mu}$

$\Rightarrow p = \frac{\rho V_0 RT}{V\mu} = \frac{800\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 293}{20\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}028} =$

$= \frac{20\cdot 8{,}31\cdot 293}{0{,}028} = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot 293}{28}\cdot 10^4 \approx$

$\approx 4769{,}66\cdot 10^4 > p_m = 1\cdot 10^6$

$\Rightarrow$ при $t = 20^\circ C$ сосуд разорвёт.

Пусть T_1 – температура азота, при которой сосуд разорвёт.

$p_m V = \frac{\rho V_0 RT_1}{\mu} \Rightarrow T_1 = \frac{p_m V \mu}{\rho V_0 R} = \frac{10^6\cdot 20\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}028}{800\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31} =$

$= \frac{2\cdot 28}{4\cdot 8{,}31}\cdot 10^2 = \frac{14}{8{,}31}\cdot 10^2 \approx 1{,}68\cdot 10^2 = 168\,K$

$t_1 = -273 + 168 = -105^\circ C$

ШИФР: 749
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

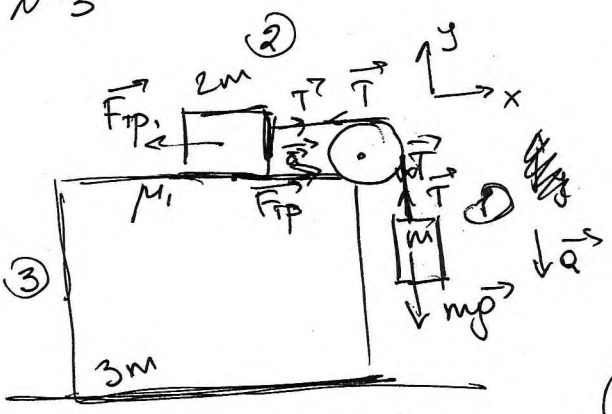
1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№ 1 (дорожка)

Ответ: ~~разорвёт~~ ; при $t_1 = -105°C$

5

№ 3



1) По второму закону Ньютона:

① $T - mg = -ma$

$T = m(g-a)$

② $T - F_{тр_1} = 2ma$

(Т. к. нить верёвка нерастяжимая, то $a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$)

$T = 2ma + 2\mu_1 mg =$ ~~$2ma + 2\mu_1 mg$~~ $2m(a + \mu_1 g)$

$m(g-a) = 2m(a + \mu_1 g)$

$g - a = 2a + 2\mu_1 g \Rightarrow$

$\mu_1 = \frac{g-3a}{2g}$

(μ_1 - коэф. трения между телами массой 2m и 3m)

2) По третьему закону Ньютона: $\vec{F_{тр}} = -\vec{F_{тр_1}}$.

$|\vec{F_{тр_1}}| = |\vec{F_{тр_2}}|$.

1

$\Rightarrow 3\mu mg = 2\mu_1 mg$

$$\mu = \frac{2}{3}\mu_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{g-3a}{2g} = \frac{g-3a}{3g} = \frac{1}{3} - \frac{a}{g}$$

~~$0 \le a \le \frac{g}{3}$~~

~~$0 \le g-3a \le g$~~

$\Rightarrow$ при $\mu \ge \frac{1}{3}$ большое тело будет неподвижно на поверхности стола

Ответ: при $\mu \ge \frac{1}{3}$