465123
Регистрационный номер

Фамилия Конорская
Имя Таисия
Отчество Станиславовна
Подпись

188
(не заполнять)

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наименьшим возможным значением y.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 188
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по ~~физике~~ математике

Дата 06.04.2024

Вариант № 4

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
3	X	3				4	

№3

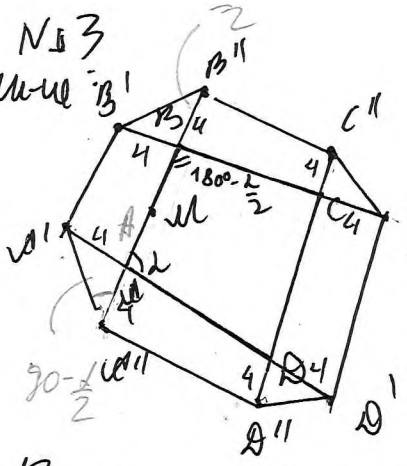
Дано: $ABCD$

ρ(сер.; верш.) $= 4 + \frac{a}{2}$,

где a – длина ребра

$12 = \frac{\sqrt{130}}{2}$

$S_{ABCD} - ?$



Пусть M – сер. AA_1, B'' и A'' соотв. так. По усл. $MB'' = BB'' + \frac{AB}{2} = 4 + \frac{AB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB'' = 4$

Аналогично $AA' = DD' = 4$

Вокруг восьмиуг. можно описать окр-ть $\Rightarrow BB' \cdot BC' = BB'' \cdot BA''$ по св-ву хорд $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(AB+4) = 4(BC+4) \Rightarrow AB = BC$

Аналогично $AB = BC = CD = AD \Rightarrow ABCD$ – ромб по пр-ку

Пусть $\angle BAD = \angle$

$\triangle AA'A''$ – р/б ($AA' = AA''$) $\Rightarrow \angle AA'A'' = \frac{180° - \angle}{2} = 90° - \frac{\angle}{2}$

$ABCD$ – ромб $\Rightarrow \angle ABC = 180° - \angle$ (по св. ромба) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BB'B'' = \frac{180° - (180° - \angle)}{2} = \frac{\angle}{2}$

$AA' \parallel BB'$ ($BC \parallel AD$ по опр. ромба как н/г) $\Rightarrow AA'B'B$ – к/г по пр-ку $\Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow \angle A'B'B = \angle ABC =$

$= 180° - \angle$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle A'B'B'' = 180° - \frac{\angle}{2}$

Вокруг $AA''A'B'B''$ можно опис-ть окр-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A'A''B' + \angle A'B'B'' = 180° = 180° - \frac{\angle}{2} + 90° - \frac{\angle}{2} \Rightarrow \angle = 90° \Rightarrow ABCD -$

См-на листе 2 продолжения №3

№1

a_{25} $a_1^{>0}$ $a_2^{>0}$

a_{24} $a_3^{>0}$

$$+\begin{cases} a_1^2 = a_2 + a_3 \\ a_2^2 = a_3 + a_4 \\ \vdots \\ a_{25}^2 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

$a_1^2 + \ldots + a_{25}^2 = 2(a_1 + \ldots + a_{25})$

Заметим, что подходит случай, когда

$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{25}$

$a_1^2 = 2a_1 \overset{a_1>0}{\Leftrightarrow} a_1 = 2$

Пусть $\left.\begin{matrix} a_1^2 + \ldots + a_{25}^2 = P \\ a_1 + \ldots + a_{25} = S \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = 2S$

При $a_1 = \ldots = 2$ $S = 25 \cdot 2 = 50 \Rightarrow S^2 = 2500$

Осталось док-ть, что это единств-ое возм-ое зн-ие

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{25})^2 = a_1^2 + \ldots + a_{25}^2 + 2(a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{24}a_{25})$

$S^2 = P + 2(a_1a_2 + \ldots + a_{24}a_{25})$

$S^2 = 2S + 2(a_1a_2 + \ldots + a_{24}a_{25})$

$\vdots$

1

Ответ: $S = 2500$

ШИФР: 188
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

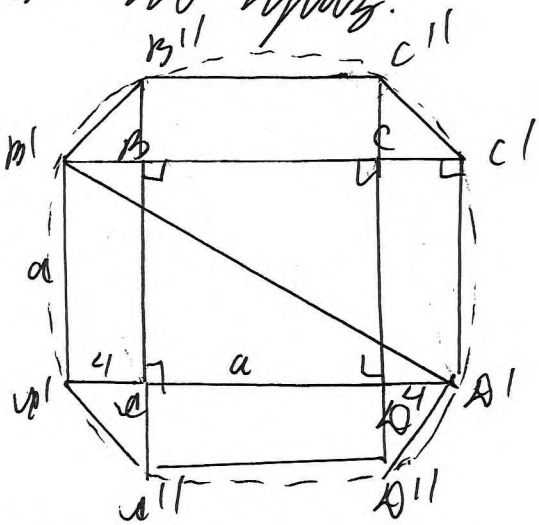
Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

-кв-т по приз.



$\angle ABB' = \angle ABC = 90^\circ$ по док.
Аналогично $\angle B'A'A = \angle BAD = 90^\circ$
$\angle B'A'D'$ опир-ся на $B'D'$
$\Rightarrow B'D'$ – диаметр $\Rightarrow B'D' = \sqrt{130}$
$ABA'B'$ – п/г по док. $\Rightarrow AB = A'B' = a_{>0} = AD$

$\triangle B'A'D'$ – п/у по док $\Rightarrow$ По т. Пифагора $A'B'^2 + A'D'^2 = B'D'^2 \Leftrightarrow a^2 + (8+a)^2 = \left(\sqrt{130}\right)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 16a + 64 = 130 \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow 16(a^2+8a+32) = 65 \Leftrightarrow (a+4)^2 + 16 = \frac{65}{16}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 8a + 32 = 65 \Leftrightarrow \cancel{a^2+8a-33=0}\ (a+4)^2 + 32 - 16 = 65 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+4)^2 = 49 \Leftrightarrow a+4 = \pm 7 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 3 \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 = 9$

Ответ: 9

+ 3

№1

a_{24} a_{25} a_1 a_2 a_3

$a_1^2 = a_2 + a_3$
$a_2^2 = a_3 + a_4$
⋮

заметим

465123
Регистрационный номер

Фамилия Макарская
Имя Таисия
Отчество Станиславовна

673
(не заполнять)

Подпись

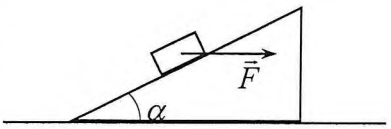
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

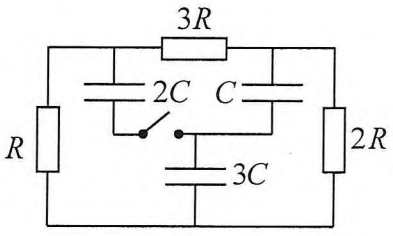
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 673
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

ФИО и рег. номер не указывать!

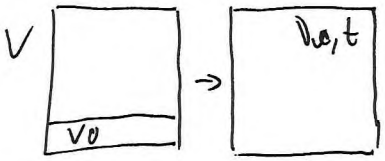
ОЦЕНКА
(не заполнять)

5	5 | 4 | 11	14

№1

Дано:
$V = 20\,л$
$V_0 = 0{,}5\,л$
$t = 20^\circ C$
$p_m = 10^6\,Па$
$\rho = 800\,кг/м^3$
$R = 8{,}31$
$M = 28\,г/моль$
$R = 8{,}31\ Дж/моль\cdot К$
$T_1 - ?$

Реш-ие:



Масса азота $m_a = \rho V_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu_a = \frac{m_a}{M} = \frac{\rho V_0}{M}$

Пусть азот нагрелся до t и сосуд не разорвался $\Rightarrow$ по ур-ию Менд.-Кл.

$pV = \nu_a RT \Rightarrow p = \frac{\nu_a RT}{V} = \frac{\rho V_0 RT}{MV} =$

$= \frac{800 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 20} = \frac{20 \cdot 8310 \cdot 293}{28} =$

$= \frac{48694600}{28} > \frac{48000000}{28} > 1000000 = p_m \Rightarrow$ (+)

$\Rightarrow$ сосуд разорвётся. Найдем T_1, при кот-ой это произойдёт.

$p_m V = \nu_a R T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{p_m V}{\nu_a R} = \frac{p_m V \cdot M}{\rho V_0 \cdot R} = \frac{10^6 \cdot 20 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot 0{,}5 \cdot 8{,}31} =$ (+)

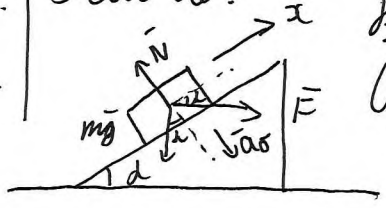
$= \frac{10^3 \cdot 28}{20 \cdot 8{,}31} \approx 168\,К \Rightarrow t_1 = -105^\circ C$ (5)

Ответ: разорвётся при $t_1 = -105^\circ C$ (+)

№2

Дано:
m, α
$F - ?$

Реш-ие:



Введём Ox вдоль н.пл. По 2 з. Н-на: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$

Ox: $F\cos\alpha = mg\sin\alpha$ (т.к. $\vec{a} \perp Ox$ по усл.) $\Rightarrow F = mg\,tg\alpha$

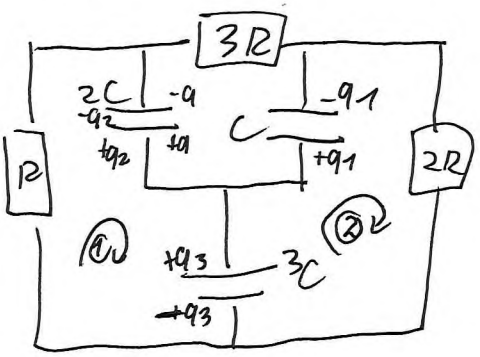
Ответ: $F = mg\,tg\alpha$ (5)

№3

Дано: q

Q_R, Q_{2R}, Q_{3R} - ?

Реш-ие:



Пусть до зам-ия заряд нижней пластины $2C$ $+q$.

Пусть после уст-ия равновесия на конд-рах уст-лись заряды, как показано на рис.

После устан-ия равн-сия ток в цепи не течёт. (Пусть ток течёт только через резисторы, но тогда по 2 пр-лу Кирхгофа $IR+3IR+2IR=0 \Leftrightarrow I=0$)

По 2 пр-лу Кирхгофа: ① $\frac{q_3}{3C}-\frac{q_2}{2C}=0 \Leftrightarrow 2q_3=3q_2$

② $\frac{q_1}{C}-\frac{q_3}{3C}=0 \Leftrightarrow q_3=3q_1$

По ЗСЗ: $q=q_1+q_2+q_3$

$$\begin{cases} q=q_1+q_2+q_3 \\ q_3=3q_1 \\ 2q_3=3q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_3=3q_1 \\ q_2=2q_1 \\ q=q_1+2q_1+3q_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1=\frac{q}{6} \\ q_2=\frac{q}{3} \\ q_3=\frac{q}{2} \end{cases}$$

+

По ЗСЭ: $W_1=W_2+Q$

$$W_1=\frac{q^2}{4C}=\frac{18q^2}{72C}$$

$$W_2=\frac{q^2}{2\cdot 36C}+\frac{q^2}{2\cdot 9\cdot 2C}+\frac{q^2}{2\cdot 4\cdot 3C}=\frac{q^2}{72C}+\frac{q^2}{36C}+\frac{q^2}{24C}=$$

$$=\frac{q^2(1+2+3)}{72C}=\frac{6q^2}{72C}$$

$\Rightarrow Q=\frac{q^2}{6C}$ +

Считаем, что $I_R \approx I_{2R} \approx I_{3R}$ в пр-се уст-ия рав-сия $dQ_R=I_R^2 R\,dt$ ... $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q_R : Q_{2R} : Q_{3R} = 1:2:3 \Rightarrow Q_R=\frac{1}{6}Q=\frac{q^2}{36C}$ $Q_{3R}=\frac{1}{2}Q=\frac{q^2}{12C}$

$Q_{2R}=\frac{1}{3}Q=\frac{q^2}{18C}$

−

Ответ: $Q_R=\frac{q^2}{36C}$, $Q_{2R}=\frac{q^2}{18C}$, $Q_{3R}=\frac{q^2}{12C}$

4