439451
Регистрационный номер

Фамилия Брезгина
Имя Арина
Отчество Александровна

182
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 3

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.
2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.
3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 122
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

олимпиада Юниор

Работа по ~~физике~~ математике

Дата 06.04.2024г.

Вариант № 3

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	0	0				1	

№1. Запишем числовой ряд, удовлетворяющий условию. Т.к. в условии не сказано, что 50 записанных чисел различны, то следующий ряд удовлетворяет условию:

2, 2, 2 ... 2 ; $2^2 = 4$ $2+2=4$

Докажем, что этот числовой ряд единственный удовлетворяет условию.

Если начать числовой ряд с 1, то следующие 2 числа в сумме давать $1^2 = 1$, этому соответствуют значения 1 и 0, но $0^2 = 0$ => все остальные числа должны быть 0, что уже не удовлетворяет усл., т.к. 1 и 2 число – это „1" => значит 1 не может появиться в ряду.

Случай с „2" рассмотрен выше.

Начнем с 3. $3^2 = 9$ => следующие два числа в сумме дают 9 => 1+8 – не удовл., т.к. „1", 2+7, не удовл., т.к. для 2 случая выше => 3+6, 4+5, 5+4, 6+3.
(1) (2) (3) (4)

1) Если числовой ряд начинается так: 3, 3, 6, то далее идут: 3, 33 ..., но! далее (после 33) должно идти значение, дающее в сумме с 33 9, что противоречит условию о том, что числа ~~все~~ положительные.

(2) 3, 4, 5 => 11, 13 ..., но, ~~я~~ можно заметить, что числа возрастают => 50 число ~~все~~ > 7 (3+4) => квадрат этого чис

будет еще больше => этот вариант не подходит.
В остальных случаях значения также будут возрастать => они тоже не удовл. усл. => вариант 2, 2, 2, ... 2 единственный.

Найдем произведение всех чисел: $2^{50} = 1024^5 = 1048576^2 \cdot 1024 =$

$= 1099513627776 \cdot 1024 = 1121943765779624$

Ответ: 1121943765779624.

№2. $x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad 3x - 1 = [\lg(10^{-y} \cdot 4^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 4^x]]$

$[a]$ – целая часть числа a; $\le a$

$\lg(10^{-y} \cdot 4^x) = -y \lg 10 + x \lg 4 = -y + x \lg 4$

$\lg[10^{3y} \cdot 4^{0x}]$ ÷ $\quad 10^{3y} > 0 \Rightarrow [10^{3y}]$ при $y \ge 0$ будет 10^{3y}, т.к. $y \in \mathbb{Z}$

при $y < 0$ $[10^{3y}] = 0$, т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{10^{3y}} < 1$

аналогично с 4^x, при $x \ge 0$

$[4^x] = 4^x$

при $x < 0$

$[4^x] = 0 \Rightarrow$

$3x - 1 \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ рассмотрим 4 возможных случая:

1) при $y > 0$ и $x > 0$

$\lg(10^{3y} \cdot 4^x)$

2) при $y > 0$, $x < 0$

$\lg\left[10^{3y} \cdot \frac{1}{4^{|x|}}\right]$, тогда, если $10^{3y} > 4^x$

$\lg\left[\frac{10^{3y}}{4^{|x|}}\right]$, если $10^{3y} < 4^x$, то $\lg 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не сущ. $\Rightarrow 10^{3y} > 4^{|x|}$

$(\log_4 10)^{3y} > (\log_4 4)^{|x|}$

$(\log_4 10)^{3y} > (\log_4 16^2)^{|x|}$

3) при $y < 0$ и $x > 0$

4) при $y < 0$ и $x < 0$

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: Школа МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2. Рассмотрим (1) случай

$\lg(10^{3y} \cdot 4^x) = 3y\lg 10 + x\lg 4 = 3y + x\lg 4$

$3x - 1 = [-y\lg 10 + x\lg 4] - [3y + x\lg 4]$

$3x - 1 = [-y + x\lg 4] - [3y + x\lg 4]$

Т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow [-y + x\lg 4] = -y + [x\lg 4]$; $[3y + x\lg 4] = 3y + [x\lg 4] =$

$\Rightarrow$

$3x - 1 = -y + [x\lg 4] - 3y - [x\lg 4]$

$3x - 1 = -4y$ | не забываем, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$3x = -4y + 1$

$x = \frac{-4y+1}{3} \Rightarrow \frac{-4y+1}{3} \geq 0$

$-4y \geq -1$

$y \leq \frac{1}{4} \Rightarrow y = 0$, т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$

x и y не могут быть отрицательными одновременно, т.а тогда $10^{3y} \cdot 4^{2x} < 1 \Rightarrow \lg 0 \Rightarrow$ не цел. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всегда будет выполняться либо ~~$\log_4 10^{3y}$~~ $10^{3y} > 4^{|2x|}$, либо

$10^{|3y|} < 4^x$, т. к. нам надо найти пару с наибольшим значением x рассмотрим только случай, где $x > 0$, а $y < 0$,

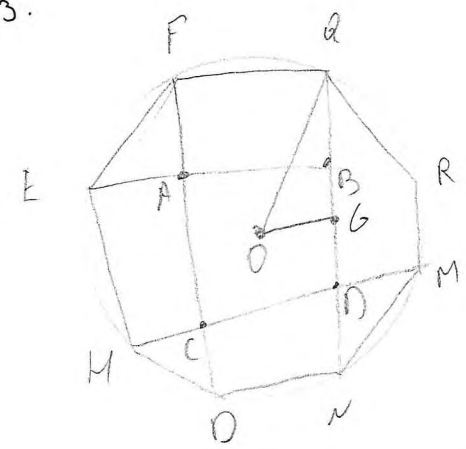
тогда $10^{|3y|} < 4^x$; $10 = 4^t \Rightarrow \log_4 10 = t \Rightarrow 4^{|3y| \cdot \log_4 10} < 4^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow |3y| \cdot \log_4 10 < x \Rightarrow$ при $y < 0$ (рассматриваемый случай)

$-3y \log_4 10 < x \Rightarrow -3y \frac{1}{\lg 4} < x$ (см лист 3)

Ответ:

3.



Дано:

ABCD - четырехуг.

$FA = CD = \frac{AC}{2} + 3$; $QB = DM = \frac{DO}{2} + 3$

$BR = EA = \frac{AB}{2} + 3$; $MC = DM = \frac{CD}{2} + 3$

$\Omega(O; R)$ - описана около $EFQRM \sim PHE$, $R = \sqrt{29}$

Найти: S_{ABCD} - ?

Решение:

Рассмотрим частный случай, когда ABCD - квадрат; тогда (см. док-во на стр. 3)

$AF = BQ = BR = OM = DN = CD = MC = AE = \frac{AB}{2} + 3$

Проведем $OG \perp BD$ (O - центр Ω), т.к. OQ - радиус Ω; $OG = \frac{1}{2} AB$, т.к. р от O до любой вершины восьмиугольника будет одинакова

$\Rightarrow$ и до вершин ABCD - тоже;

Рассмотрим $\triangle OQG$: $\angle OQG$ - п/у по построению $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Т. Пифагора $OQ^2 = OG^2 + QG^2 \Rightarrow 29 = \frac{AB^2}{4} + \left(\frac{AB}{2} + \frac{AB}{4} + 3\right)^2$

пусть $AB = a$, тогда $29 = \frac{AB^2}{4} + (a+3)^2 \Rightarrow 29 = \frac{AB^2}{4} + a^2 + 6a + 9$

$20 = \frac{AB^2 + 4AB^2}{4} + 6a \mid \cdot 4$

$80 = 5a^2 + 6a \Rightarrow$ $5a^2 + 6a - 80 = 0$

$D_1 = 9 + 400 = \sqrt{409}^2$

$a_1 = \frac{-3 - \sqrt{409}}{5} < 0$ - не удовл. усл.

$a_2 = \frac{-3 + \sqrt{409}}{5}$

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: Киев МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№3. $a_2 = \frac{-3+\sqrt{409}}{5} \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 = \left(\frac{\sqrt{409}-3}{5}\right)^2 = \frac{418-6\sqrt{409}}{25}$

Ответ: $\frac{418-6\sqrt{409}}{5}$ (−) (5)

№2. $\lg[10^{3y} \cdot 4^x]$, [illegible]

(6)

Ответ: (0;0).

№3. Фигура ABCD - квадрат, т.к. $\angle A \cdot AD = \angle A \cdot AB$ и аналогично с остальными хордами ω. (−)

439451
Регистрационный номер

Фамилия Брезгина
Имя Арина
Отчество Александровна

669
(не заполнять)

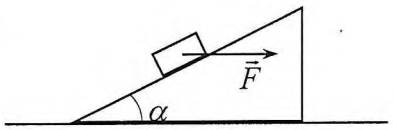
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

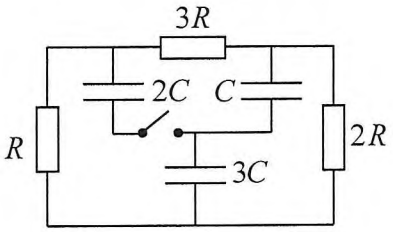
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 669
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024г.

Вариант № _____

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

5 | 5 | 3 || 13

1. Дано:

$V = 20$ л

$V_0 = 0{,}5$ л ($N_ж$)

$t = 20°C$

$P_{max} = 10^6$ Па

$\rho_ж = 800$ кг/м^3

$M_ч = 28$ г/моль

$R = 8{,}31$ Дж/(моль·град)

$P > P_m$ – ?

t при P_m – ?

Решение:

$m = \rho_ж V_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 800 = 0{,}4$ (кг)

$PV = \nu RT \qquad T = t + 273 = 293$ K

$$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{m \cdot R \cdot T}{M_ч \cdot V} = \frac{0{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{831 \cdot 293 \cdot 10^3}{7 \cdot 20} \approx 831 \cdot 293 \cdot 7 = 1727649 \text{ (Па)} > 10^6 \text{ Па}$$

=> сосуд разорвет +

Найдем t, при которой это случится:

$P_m V = \frac{m}{M_ч} R T'$, где $T' = t + 273$

$$T' = \frac{P_m V \cdot M_ч}{m R} = \frac{10^6 \cdot 20 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 800 \cdot 0{,}5} =$$

+

$$= \frac{140 \cdot 10^3}{831} \approx \frac{20 \cdot 10^3}{\cancel{120}\ 6} \approx \frac{1000}{6} \approx 167 \text{ (K)}$$

$t = 167 - 273 = -106°C$

Ответ: да, при $t = -106°C$. ±

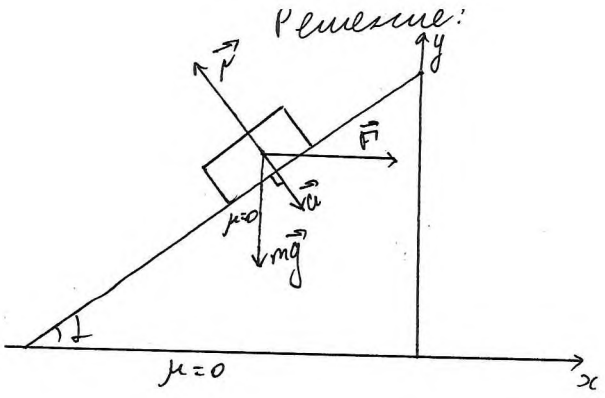
5

2. Дано:

α, m

F - ?

Решение:



$ma = mg\cos\alpha$ (по II з. Ньютона)

$a = g\cos\alpha$

на ox: $N\cos\alpha = mg + ma\cos\alpha$

$N\cos\alpha = m(g + g\cos^2\alpha)$

$N = \frac{mg(1+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{mg\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}$

на oy:

$N\sin\alpha = F + ma\sin\alpha$

$mg(1+\cos^2\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha = F + mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$mg((1+\cos^2\alpha)\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha) = F$

$mg\operatorname{tg}\alpha = F$

5

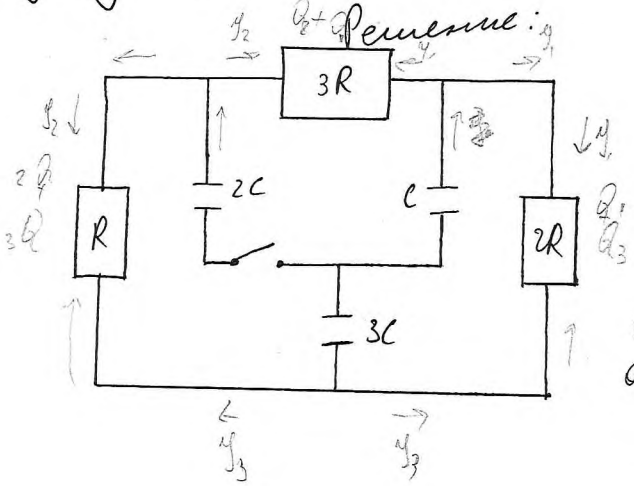
Ответ: $mg\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

№3. Дано:

R, C, q

Q_1, Q_2, Q_3 - ?

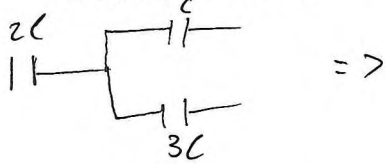
Решение:



$Q = W$

$W = \frac{q^2}{2C}$

Рассмотрим схему из 3-ох конденсаторов отдельно, она эквивалентна:



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на C и 3C выступит заряд q_1, а на 2C останется какой-то заряд $q_2 = q - q_1$

4

↓ см. след. лист

ШИФР: 669
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024г.

Вариант № _____

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

№3. $q_1 - 4C$

$q_2 - 2C \Rightarrow q_1 = 2q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{3}q \Rightarrow q_1 = \frac{2}{3}q \Rightarrow q_2 = q_1 = \frac{1}{3}q$

На 3R уйдет $\frac{1}{4}q_2$ и $\frac{2}{5}q_1 \Rightarrow \frac{1}{12}q$ (с 2С) и $\frac{2}{15}q$ (с С)

На 2R - $\frac{3}{5}q_1$ и $\frac{1}{3}q_1 \Rightarrow \frac{1}{5}q$ (с С) и $\frac{1}{9}q$ (с 3С)

На R - $\frac{3}{4}q_2$ и $\frac{2}{3}q_1 \Rightarrow \frac{1}{4}q$ (с 2С) и $\frac{2}{9}q$ (с 3С)

$Q_R = \frac{q^2}{43 \cdot 3C} + \frac{q^2}{48C} = \frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{129} + \frac{1}{48}\right)$

$Q_{2R} = \frac{q^2}{50C} + \frac{q^2}{81 \cdot 6C} = \frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{486}\right)$

$Q_{3R} = \frac{q^2}{144 \cdot 4C} + \frac{q^2}{225 \cdot 8C} = \frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{576} + \frac{2}{225}\right)$

3

Ответ: $\frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{486}\right) = Q_2$; $Q_1 = \frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{129} + \frac{1}{48}\right)$

$Q_3 = \frac{q^2}{C}\left(\frac{1}{576} + \frac{2}{225}\right)$