356

438797
Регистрационный номер

Фамилия Крылов
Имя Никита
Отчество Александрович

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg} a\cdot(x-\operatorname{tg} a)^2+\operatorname{ctg} a\cdot(x-\operatorname{ctg} a)^2=0$ имеет единственное решение.

3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 356
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

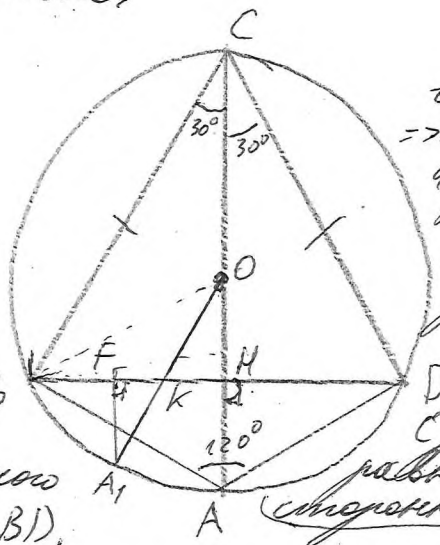
1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
2	3	2				7	

№3

Дано:
$\triangle BCD$ – равнобедренный ($BC=CD$), вписан в окружность
На $\smile BD$, ~~есть~~ не содержащей C лежит точка A так, что $\angle BAD=120^\circ$; $AC=4$

Найти S_{ABCD}

Решение:



1. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник => по св-ву вписанного 4-угольника: $\angle BCD+\angle BAD=180^\circ$ => $\angle BCD=60^\circ$ – как противолежащие углы.

2. В $\triangle BCD$: $\triangle BCD$ – равнобедренный с углом C при вершине равным 60° => $\triangle BCD$ – равносторонний

4. Все ~~уг~~ вписанные углы, ~~BAD~~ опирающиеся на $\smile BD$, не содержащую точку C будут равны 120° => существует бесконечно много треугольников BAD, ~~опирающ~~ с $A\in\smile BD$, при этом их площади будут относиться, как высоты, опущенные из A на BD, т.к. BD – их общее основание. Соответственно рассмотрим $\triangle A_1FK$, где A_1 – одно из положений точки A; AF – высота к BD, $K=A_1O$ (где A_1O – радиус) => A_1F – катет, A_1K – гипотенуза => $A_1F=A_1K\cdot\cos\angle FA_1K$, где $\angle FA_1K\in[0;\pi/2]$, при этом $\angle FA_1K=0$ при $A_1K\parallel A_1F$, т.е. когда A_1F лежит на радиусе и $\angle FA_1K=\frac{\pi}{2}$, когда $A_1=B$ или $A_1=C$ => $|A_1F|\in[0;|A_1K|]$ => наибольшая ~~наибольшая~~ площадь $\triangle ABD$ и => $ABCD$ при $A_1F=A_1K$, т.е. ~~$A=A_1C$~~ $AF=A_1F\subset OA$ и наименьшая ~~наименьшая~~ при $A=A_1=B=C$ и $A=A_1=C$

5. $\begin{cases} S_{ABCD}=S_{BCD}+S_{A_1BD} \\ |A_1F|\in[0;|A_1K|] \end{cases}$

6. Рассмотрим случай, когда AH, где AH – перпендикуляр к BD, лежит на OA => $OA\perp BD$; по свойству диаметра, проведённого к хорде, диаметр перпендикулярен хорде => и делит её пополам ~~OA лежит на диаметре~~ OH лежит на диаметре и H – середина BD.

Лист 1 из 1

7. В равностороннем $\triangle BCD$: H – середина BD => CH – медиана к BD => CH – высота к BD и биссектриса $\angle C$ => $\angle ACB=\angle ACD=30^\circ$; $\begin{cases} CH\perp BD \\ AH\perp BD \end{cases}$ => $\begin{cases} AHC \text{ – один отрезок} \\ AH\in \text{диаметру} \end{cases}$ =>

=> AC – диаметр

; ~~т.к. ABCD; AC и BD диагонали~~ $\angle CBA$ опирается на диаметр => $\angle CBA$ – прямой =>

=> $BC = CA \cdot \cos\angle ACB = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = BD = CD$

3. В ABCD; AC и BD – диагонали => $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\angle AHD}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 1}{2} = 4\sqrt{3}$

4. Рассмотрим случай, когда $A = D$ или $A = B$, тогда ~~CD~~ $CA = CD = 4$ или $CA = CB = 4$ =>

=> $S_{ABD} = 0$ => $S_{ABCD} = S_{BCD} = \frac{BC \cdot CD \cdot \sin\angle BCD}{2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3}$ => ~~во всех~~ всех практически случаях из п. (3) и (п. 4) площадь $= 4\sqrt{3}$ => площадь $= 4\sqrt{3}$ при любом положении точки, удовлетворяющем условию задачи

Ответ: $4\sqrt{3}$

Нет полного обосн-я! 2

№2

При каких а уравнение $tga \cdot (x - tga)^2 + ctga(x - ctga)^2 = 0$ имеет ~~ровно~~ единственное решение

$tga(x - tga)^2 + ctga(x - ctga)^2 = 0$

~~из~~ ограничение: $\begin{cases} \sin a \neq 0 \\ \cos a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tga \neq 0 \\ ctga \neq 0 \end{cases}$

$tga(x - tga)^2 + \frac{1}{tga}\left(x - \frac{1}{tga}\right)^2 = 0$

Пусть $tga = t, t \neq 0 \Rightarrow t(x-t)^2 + \frac{1}{t}\left(x - \frac{1}{t}\right)^2 = 0$

$t(x^2 - 2tx + t^2) + \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{xt-1}{t}\right)^2 = 0$

$x^2t - 2t^2x + t^3 + \frac{x^2t^2 - 2xt + 1}{t^3} = 0 \mid \cdot t^3$

$x^2t^4 - 2t^5x + t^6 + x^2t^2 - 2xt + 1 = 0$

~~$(t^2+1)(t^4 - t^2 + 1) - 2tx(t^4+1) + x^2t^2(t^2+1) = 0$~~ $t^6 + x^2t^4 - 2t^5x + x^2t^4 + x^2t^2 - 2xt + 1 = 0$

$t^4(t^2 - 2tx + x^2) + (xt)^2 - 2xt + 1 = 0$

$t^4(t-x)^2 + (tx-1)^2 = 0$

$t^4 \geq 0$ при $\forall t$

$(t-x)^2 \geq 0$ при $\forall t$ => $\begin{cases} (t-x)^2 = 0 \\ (tx-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - x = 0 \\ tx - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ t = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x = 1 \\ t = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ t = -1 \end{cases}\right. \Rightarrow$

$(tx-1)^2 \geq 0$ при $\forall t$

$t^4 \neq 0$

=> обратная замена: $\left[\begin{array}{l} tga = 1 \\ tga = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Ответ: при $a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

(3)

№1

При делении года на 100 ~~целая часть~~ частное всегда равно 23. Обозначим ~~дро~~ остаток за x, тогда каждый год – это $2300 + x$ и он должен быть кратен $23 + x$ =>

=> $\frac{2300 + x}{23 + x} = k, k \in Z$ => ~~$k = 100 - \frac{99x}{x+23}, k \in Z \Rightarrow 99x \vdots (x+23) \Rightarrow \frac{99x}{x+23} = m, m \in Z \Rightarrow 99x = mx + 23m \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow x = \frac{23m}{99-m}$~~ $k = \frac{x+2300}{x+23} = 1 + \frac{2277}{x+23}, k \in Z \Rightarrow \frac{2277}{x+23} \in Z$ => из $x+23$ можно вынести

(деление уголком: $x+2300 - (x+23) = 2277$)

будто множитель, на который делится 2277 ($2277 = 11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23$; 207, 69) => $\begin{cases} (x+23) \vdots 23 \Rightarrow x = 23; 46; 69; 92 \text{ – 4 числа} \\ (x+23) \vdots 3 \Rightarrow x = 1, 4 \ldots \text{ с шагом 3, т.е. } \frac{100}{3} = 33 \text{ числа}, \text{ повторяются } 69, 21, 54, 87 \\ (x+23) \vdots 11 \Rightarrow x = 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98 \text{ – 9 чисел} \end{cases} \Rightarrow$

=> $4 + 9 + 33 - 4 = 42$

(2)

Ответ: 42