352

435291
Регистрационный номер

Фамилия Захаров
Имя Александр
Отчество Константинович

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\sin a\cdot(x-\sin a)^2+\operatorname{ctg} a\cdot(x-\operatorname{ctg} a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника BCD $(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=45^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 352
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 2
Площадка написания: г Москва

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
0	0	0				1	

№1

можно заметить, что все годы с нечётными номерами нам не подойдут: ~~у всех номер года всегда нечёт~~

1) 2200 / 100 = 22
2200 % 100 = 0

0 + 22 = 22

$\frac{2200}{22} = 100 \Rightarrow$ 2200 — правильный счастливый год.

Далее будем рассматривать только года, у которых при делении на 100 будет 21.

Итак, любой нечетный год мы достигнем $21 + 2k + 1$, где $2k+1$ - число остатка от деления номера года на 100, тогда мы получим $22 + 2k = 2(11+k)$ - чётное, при этом номер года нечётный, значит $\frac{n_{нечетный}}{2(11+k)}$

$n_{нечётный} \bmod 2(11+k) \neq 0$, значит все годы с нечётными номерами не счастливые.

Пусть наше условие выглядит так:

$n \bmod b = 0$, где n - номер года,

$b = n \bmod 100 + \underbrace{n / 100}_{\text{целочисленно}}$

такие несчастливыми будут числа, последняя цифра которых равна 4, т.к. $21 + x \cdot 10 + 4 = 25 + 10x \vdots 5$, а само число не делится на 5, т.к. на 5 делятся только числа, последняя цифра которых это 0 или 5, а у нас последняя цифра это 4.

№2.

$$\sin\alpha(x-\sin\alpha)^2 + \operatorname{ctg}\alpha(x-\operatorname{ctg}\alpha)^2 = 0$$

$$x^2\sin\alpha - 2x\sin^2\alpha + \sin^3\alpha + x^2\operatorname{ctg}\alpha - 2x\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = 0$$

$$x^2(\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) - 2x(\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + \sin^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = 0$$

При $\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha + \cos\alpha = 0 \ (1) \\ \sin\alpha \neq 0 \end{cases}$$

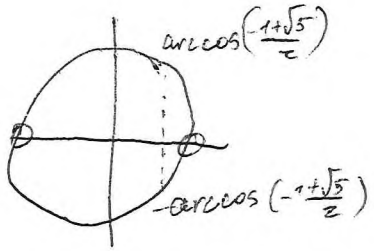
(1) $1 - \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$

$D = 1 + 4 = 5$

$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee -1$

$-1-\sqrt{5} \vee -2$.

$-\sqrt{5} \vee -1$

$1 \vee \sqrt{5}$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow$ н.к.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee 1$.

$-1+\sqrt{5} \vee 2$.

$\sqrt{5} \vee 3$

$5 < 9 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$.

$x^2 a - 2x(a^2 - 2b) + a^3 - 3ab = 0$. a

$a^2 - 2b$

$a^3 - 3b\sin\alpha + 3b\operatorname{ctg}\alpha$.

$a^3 - 3b(a)$

$a^3 - 3ab$.

$x^2 a - 2a^2 x + 4xb + a^3 - 3ab = 0$

ШИФР: 352
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по олимпиаде

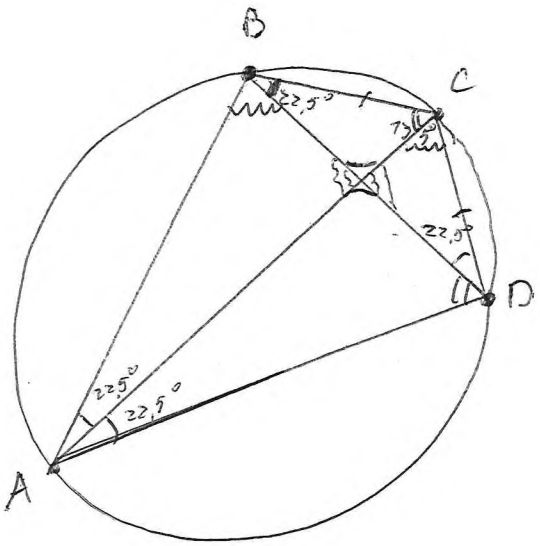
Дата 06.04.24
Вариант № 2
Площадка написания: г. Москва

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

$\sqrt{3}$



Дано $\triangle BCD$.
$BC = CD$.
$\triangle BAD$
$\angle BAD = 45°$.
$AC = \sqrt[9]{2}$.
$S_{ABCD} - ?$

Решение:

1) Так как $\angle BAD = 45°$, а также он вписанный, (по опр. вп. угла), то $\cup BD = 90° = 2\angle BAD$ (по св. вп. угла).
2) $ABCD$ - вписанный, значит $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180°$ =>
=> $\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - 45° = 135°$. (по св. вп. окр.)
3) $\triangle BCD$ - равнобедренный, значит $\angle CBD = \angle CDB = \frac{180° - 135°}{2} = 22,5°$.
4) $\angle BDC$ вписанный, и опирается на туже дугу что и $\angle BAC$ => $\angle BAC = \angle BDC = 22,5°$ (по св. вп. углов), тогда $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 22,5$
5)