434626.
Регистрационный номер

Фамилия Чапайкин
Имя Арсений
Отчество Георгиевич

(не заполнять)

Чапайкин
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наименьшим возможным значением y.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	0	X				1	

№1

Обозначим числа за $a_1, a_2 \dots a_{25}$ (счет по часовой стрелке), тогда верно, что $\begin{cases} a_1^2 = a_2 + a_3 \\ a_2^2 = a_3 + a_4 \\ \dots \\ a_{25}^2 = a_1 + a_2 \end{cases}$ ①.

Если сложить все ур-я системы ①, получится, что
$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{25}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{25})$. ②

Перенесем всё в левую сторону, получим:
$a_1(a_1 - 2) + a_2(a_2 - 2) + \dots + a_{25}(a_{25} - 2) = 0$ ③

3) Выполняется, если все числа набора равны 2.

~~Докажем, что других решений нет: по нер-ву о средних: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{25}^2}{25} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{25})^2}{25^2}$~~

~~По нер-ву Коши-Буняковского-Шварца: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{25}^2 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_{25})^2$.~~

~~Если в наборе $a_1, a_2 \dots a_{25}$ такое-то из чисел больше 2, то (если обозначить это число за a_x) $a_x^2 > 2a_x + 3$. Учитывая, что $a_i \in \{a_1; a_2 \dots a_{25}\} > 0$~~

~~Докажем, что если $x \geq 3$, то $x^2 > 2x + \frac{2}{3}$ $(x \in \mathbb{R})$ по ин~~
~~дукции.~~

~~I: $x = 3$: $9 > \frac{8}{3} \Rightarrow$ V~~

~~II: Допустим, что утверждение верно при некото~~
~~ром y. Докажем, что оно верно и при $y+1$.~~

~~$(y+1)^2 > 2(y+1) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 > 2y + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y^2 > \frac{1}{3}$ (т.к. мы н~~
~~начально рассматриваем числа, больше 2, нер-во верн~~
~~$\Rightarrow x^2 > 2x + \frac{2}{3}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$, таких $x \geq 3$ $(x \in \mathbb{R})$.~~

~~Заметим, что единицу в наборе быть не может, т~~
~~ак как существуют две тройки~~

При этом из нер-ва о средних следует, что (2) ~~тоже~~ справедливо, только когда все числа равны 2.

Значит, квадрат суммы чисел равен $(2 \cdot 25)^2 = 2500$

Ответ: 2500.

(1)

N2

$$2x + 1 = [\lg(10^{-y} \cdot 5^x)] - [\lg[10^{4y} \cdot 5^x]]$$

~~I: При $y < 0$ $[\lg(10^{-y} \cdot 5^x)] - [\lg[10^{4y} \cdot 5^x]] > 2x + 1$.~~

~~II: При $y = 0$: $2x + 1 = [\lg 5^x] - [\lg[5^x]]$, при целых~~
~~значениях x $[\lg 5^x] = [\lg[5^x]] \Rightarrow x$ – целое.~~
~~При отрицательных x $\lg[5^x]$ не существует.~~

~~I: При $x = 0$ $1 = [\lg 10^{-y}] - [\lg[10^{4y}]]$~~

I: При $y < 0$: $[\lg(10^{-y} \cdot 5^x)] \leq [\lg[10^{4y} \cdot 5^x]]$. и при этом $[\lg[10^{4y} \cdot 5^x]]$ существует только при $x > 0 \Rightarrow \emptyset$

II. При $y = 0$ V

Ответ: $(\frac{1}{2}; 0)$.

(2)

734626
Регистрационный номер

Фамилия Чапайкин
Имя Арсений
Отчество Георгиевич.

734626664
(не заполнять)

Чапайкин
Подпись

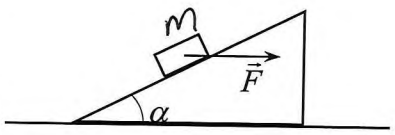
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

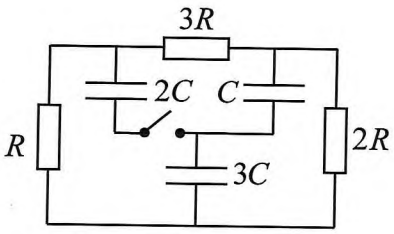
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 664
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Работа по физике.

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
5	5	0				10	

№1

Найдем давление в сосуде, если весь азот испарится и на ~~испарится весь азот~~ реакция до с

По закону Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT = \frac{pV_0}{\mu} RT$.

$p = \frac{pV_0 RT}{\mu V} = \frac{800 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} > 10^6 \Rightarrow$ сосуд лопнет.

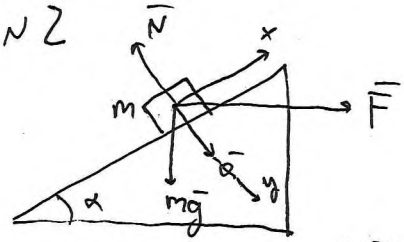
Найдем температуру, при которой это случится.

$\frac{pV_0 \cdot R \cdot T_x}{\mu V} = 10^6 \Leftrightarrow T_x = \frac{10^6 \mu V}{pV_0 R} = \frac{10^6 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = \frac{10^3 \cdot 28 \cdot 2}{400 \cdot 8{,}3}$

$= \frac{10^3 \cdot 28}{20 \cdot 8{,}31} = \frac{10^3 \cdot 14}{83{,}1} \approx$ ~~16,8K~~ 169K

Ответ: ~~16,8K~~ 169K = -104°C

№2



$\begin{cases} ma_x = F\cos\alpha - mg\sin\alpha \\ ma_y = F\sin\alpha + mg\cos\alpha - N \end{cases}$

Если ускорение перпендикулярно оси ОХ, то $a_x = 0 \Rightarrow F\cos\alpha = mg\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Ответ: $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.