35D

433791
Регистрационный номер

Фамилия ПЕТРИК
Имя ДМИТРИЙ
Отчество ИГОРЕВИЧ

(не заполнять)

ДП
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 350
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
2	3	2				7	

№2

$\log_b a(x-\log_b a)^2 + c\log_b a(x-c\log_b a)^2 = 0$ (*)

$\log_b a(x-\log_b a)^2 + \frac{1}{\log_b a}(x-\frac{1}{\log_b a})^2 = 0$

1. Замена $b = \log_b a$:

$t(x-b)^2 + \frac{1}{b}(x-\frac{1}{b})^2 = 0$ (**)

$t(x^2-2xb+b^2) + \frac{1}{b}(x^2-\frac{2x}{b}+\frac{1}{b^2}) = 0$

$x^2t - 2xb^2 + b^3 + \frac{x^2}{t} - \frac{2x}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 0 \mid \cdot t \neq 0$ (т.к. иначе (**) не имеет смысла)

[1] $\begin{cases} x^2t^2 - 2xb^3 + b^4 + x^2 - \frac{2x}{b} + \frac{1}{b^2} = 0 \ (1) \\ b \neq 0 \end{cases}$

1.1. Рассм. (1):

$x^2b^2 + x^2 - 2xb^3 - \frac{2x}{b} + b^4 + \frac{1}{b^2} = 0$

$x^2(b^2+1) - x(2b^3 + \frac{2}{b}) + b^4 + \frac{1}{b^2} = 0$

$D = (2b^3+\frac{2}{b})^2 - 4(b^2+1)(b^4+\frac{1}{b^2}) = 4b^6 + \frac{8b^3}{b} + \frac{4}{b^2} - 4(b^6+1+b^4+\frac{1}{b^2}) =$

$= 4b^6 - 4b^6 + 8b^2 + \frac{4}{b^2} - \frac{4}{b^2} - 4 - 4b^4 = -4b^4 + 8b^2 - 4$

Т.к. по усл. ур-е (*) (а следовательно ур-е (**)) должно имеет 1 реш. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = 0 \ (1) \\ D > 0 \\ x_1 = x_2 \ (2) \end{array}\right.$

1.1.1. Рассм. (1):

$-4t^4+8t^2-4=0$

-4	0	8	0	-4
-4	-4	4	4	0

$\Rightarrow t=1$ - корень

$(t-1)(-4t^3-4t^2+4t+4)=0$

-4	-4	4	4
-4	-8	-4	0

$\Rightarrow t=1$ - корень

$(t-1)^2(-4t^2-8t-4)=0$

$D=64-(-4)(-4)4=64-64=0 \Rightarrow 1$ дей. к.

$t_{1,2}=\frac{8\pm0}{-8}=-1$

$(t-1)^2(t+1)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

1.1.3. Верн. в сист. 1:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. \\ t\neq0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

1.2. Рассм. 2:

$\begin{cases} -4t^4+8t^2-4>0 \\ \frac{2t^3+\frac{1}{t^2}+\sqrt{-4t^4+8t^2-4}}{2(t^2+1)}=\frac{2t^3+\frac{1}{t^2}-\sqrt{-4t^4+8t^2-4}}{2(t^2+1)} \end{cases}$

$(t-1)^2(t+1)^2>0$

$\frac{2\sqrt{((t-1)(t+1))^2}}{2(t^2+1)}=0$

$\begin{cases} t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty) \\ |(t-1)(t+1)|=0 \\ t^2+1\neq0 \end{cases}$

$t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty$

$(t-1)(t+1)=0$

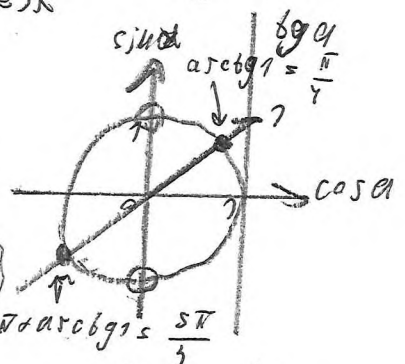
$t^2\neq-1$ - верно, при любом $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} t\neq-1;1 \\ \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t\in\varnothing$

2. Обратная замена:

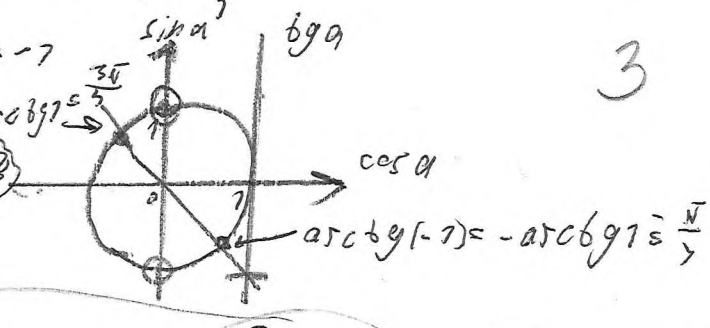
2.1. Если $t=1 \Rightarrow tg\,a=1$

$a=\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}$



2.2. Если $t=-1 \Rightarrow tg\,a=-1$

$a\in\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right\},\ k\in\mathbb{Z}$



3

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi m;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi m;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi m;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi m\right\},\ m\in\mathbb{Z}$.

ШИФР: 350
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

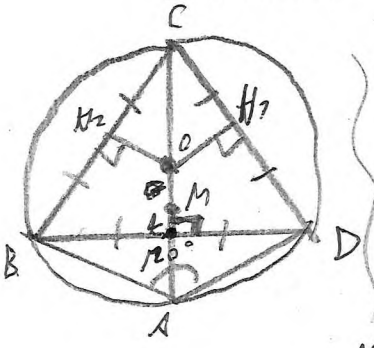
ЮНИОР

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
2	3	2				7	



№ 3

Дано
$\triangle BCD$ – р/б; $A \in \breve{BD}$; $C \notin \breve{BD}$; $\angle BAD = 120°$; AC
$\omega(O;R)$ – опис. около BCD

Найти
S_{ABCD} – ?

Решение:

1. ~~Рассм.~~ 1. Д.п. $\overset{M}{\boxed{}}H_1$ – сер. перп. к CD; $\overset{M}{\boxed{}}H_2$ – сер. перп. к BC; $AC \cap BD = CA$

2. Рассм. $\triangle BCD$ – впис. в ω (усл.):

2.1. $\left.\begin{array}{l}\overset{M}{\boxed{}}H_1 \text{ – сер. п. (п.1)} \\ \overset{M}{\boxed{}}H_2 \text{ – сер. п. (п.1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{M}{\boxed{}}H_1 \cap \overset{M}{\boxed{}}H_2 = O \Rightarrow$ (по св-ву опис. окр.) OH_1, OH_2 – сер. перп.

2.2. $\angle BAD$ – впис. в ω (по опр. впис. уг.) $\Rightarrow \angle BAD = \frac{1}{2}\breve{BCD}$
$\breve{BCD} = 2\angle BAD = 240°$

2.3. $\triangle BCD$ – р/б (усл.) $\Rightarrow \begin{cases} BC = CD \text{ (по опр. р/б тр.)} \\ \angle CBD = \angle CDB \text{ (по св-ву р/б тр.)}\end{cases}$

2.4. $\angle CBD$ – впис. в ω (по опр.) $\Rightarrow \angle CBD = \frac{1}{2}\breve{CD}$
$\angle CDB$ – впис. в ω (по опр.) $\Rightarrow \angle CDB = \frac{1}{2}\breve{CB}$ $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}(\angle CB + \angle CDB) = \frac{1}{4}\breve{BCD} = 60°$

2.5. $\angle CBD + \angle CDB + \angle BCD = 180°$ (по т. о сум. угл. тр.) $\Rightarrow \angle BCD = \angle CBD = \angle C$
$= 60° \Rightarrow \triangle BCD$ – р/с (по призн. р/с тр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CD = BD$ (по опр. р/с тр.)

3. ~~2.6.~~ Рассм. $\triangle CH_2O$, $\triangle CH_1O$ – п/у (т.к. OH_1, OH_2 – сер. перп. (п.2.1)

Лист 2 из 3

CO - общ.

$CH_2 = \frac{1}{2} CB$ (OH_2 - с.п. (п.2.1))

$CH_1 = \frac{1}{2} CD$ (OH_1 - с.п. (п.2.1))

$CD = CB$ (п.2.5)

$\Rightarrow \triangle CH_2O = \triangle CH_1O$ (по ~~2-м~~ кат. и гип.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle ACD$ (СЭ ПП) $= \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ$

~~2. 3. 4.~~

4. Рассм. $\triangle CH_1O$ - п/у (аналог. п.3):

4.1. $\angle DCA = 30^\circ$ (п.3) $\Rightarrow OH_1 = \frac{1}{2} OC$ (по св-ву п/у тр.)

4.2. $CH_1^2 + OH_1^2 = CO^2$ (по т. Пифагора)

~~5. Рассм. 5. Рассм. ω.~~ 5. Рассм. $\triangle CBK$, $\triangle CDK$:

~~AC - диам.~~

$\angle BCK = \angle DCK$ (п.4)

$\angle CBD = \angle CDB$ (п.2.3)

$BC = CD$ (по усл.)

$\Rightarrow \triangle CBK = \triangle CDK$ (по ~~2-м~~ ст. и 2-м угл.) $\Rightarrow BK = DK$ (СЭ ПП) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CK$ - мед. (по опр. мед.)

6. Рассм. $\triangle BCD$ - р/с (п.2.5):

6.1. CK - мед. (п.5) $\Rightarrow CK$ - бисс., выс. (по св-ву р/б тр.) $\Rightarrow CK$ - сер. п. (по опр. сер. п.)

6.2. $\triangle BCD$ - впис. в ω (усл.)

CK - сер. п. (п.6.1)

$\Rightarrow OH_1 \cap OH_2 \cap CK = O$ (по св-ву опис. окр.)

~~6.2~~

7. Рассм. ω:

7.1. CA - диам. $\Rightarrow CO = OA = \frac{1}{2} CA$ (CO, OA - рад. (по опр. рад.)) $\Rightarrow CO = OA = 2$

8. $CH_1^2 + OH_1^2 = CO^2$ (п.4.2) п.4.2. ?

$CH_1^2 + \frac{1}{4} CO^2 = CO^2$ (п.4.1)

$CH_1^2 = \frac{3}{4} CO^2$

$CH_1^2 = \frac{3}{4} \cdot 2^2$

$CH_1 = \sqrt{3} \Rightarrow DC = 2\sqrt{3}$ (OH_1 - сер. п. (п.2.1)) $\Rightarrow DC = BC = BD = 2\sqrt{3}$ (п.2.5)

7.1. $\angle BDA$, $\angle BCA$ - впис., оп. на одну дугу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDA = \angle BCA = 30^\circ$ (по св-ву)

7.2. аналог. п.7.1 $\Rightarrow \angle CAD = \angle CBD = 60^\circ$

7.3. Из п.7.1 и п.7.2 $\Rightarrow \angle AKD = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ (по п. о сум. уг. тр.)

$\Rightarrow \angle AKD = 90^\circ \Rightarrow \angle AKD + \angle DKC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CK$ и CA - сост. одну прям. $CA \Rightarrow O \in CA$ ($O \in CK$ (п.6.2))

9. $\angle CKD = 90^\circ$ (CK - выс. (п.6)) $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CA \cdot \sin\angle CKD = \frac{1}{2} BD \cdot CA =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = \boxed{4\sqrt{3}}$? Част случай!

2

Ответ: $4\sqrt{3}$.

N1

Пусть x - частное от дел. n на 100

y - ост. от дел. n на 100

$\Rightarrow n = 100x + y \Rightarrow n$ - счастл., если

$\frac{100x + y}{x + y} \in \mathbb{Z}$

ШИФР: 350
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: дистанц. МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№1 (проф)

1. Если $n \le 2300 \Rightarrow$ ~~2700~~ $x = 24$, $y = 0 \Rightarrow \frac{2300}{24} \in \mathbb{Z}$ – верно $\Rightarrow n = 2300$ счаст.

3. Если $n \ne 2300 \Rightarrow x \le 23$, $y \in [1; 99] \Rightarrow$ ~~$23 \cdot y$~~ при $\frac{2300 \cdot y}{23 \cdot y} \in \mathbb{Z}$, n – счаст

4. Если y – чет. $\Rightarrow \frac{\text{чёт.} \cdot \text{чет.}}{\text{нечёт.} \cdot \text{чёт.}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\text{чёт.}}{\text{нечёт.}} \in \mathbb{Z}$ – есть реш. (⇒)

Если y – нечёт $\Rightarrow \frac{\text{чёт} \cdot \text{нечёт}}{\text{нечёт} \cdot \text{нечёт}} = \frac{\text{чёт}}{\text{нечёт}} \in \mathbb{Z}$ – нев., при любом y

(⇒) y – всегда чёт. $\Rightarrow y = 2f$, $f \in \mathbb{Z}$, $f \in [1; 49]$ (т.к. $f \cdot 2 = 98$ – макс.)

5. Из $\frac{2300 \cdot y}{23 \cdot y} \in \mathbb{Z}$ (п.3) $\Rightarrow \frac{2300 \cdot 2f}{23 \cdot 2f} \in \mathbb{Z}$ (⇐)

$\frac{2f \cdot 2300}{-2f \cdot 23}$ | $\frac{2f \cdot 23}{2}$ (Запом. y)

$\frac{2287}{2277}$

$\Rightarrow \frac{2f \cdot 2300}{2f \cdot 23} \le 1$

$2287 \mid 253$ | 9
-18
$\overline{67}$
-55
$\overline{12}$

$253 \mid 23$ | 11
-23
$\overline{23}$
-23
$\overline{0}$

(⇒) $1 + \frac{2277}{23 \cdot 2f} \in \mathbb{Z}$

$\frac{2277}{23 \cdot 2f} \in \mathbb{Z}$ (*)

$\frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{23 \cdot 2f} \in \mathbb{Z}$

Т.к. $23 \cdot 2f$, при любом $f > 3$;

$\Rightarrow 23 \cdot 2f$ должен сост. из 2 и больше дел. (*) имелся (⇐)

При $f = 1 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{25} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 2 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{11 \cdot 23}{3} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 3 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 3} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 4 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 4} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 5 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 5} \in \mathbb{Z}$ – верно $\Rightarrow n = 2310$ – счаст.

$f = 6 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 6} \in \mathbb{Z}$ – ~~верно~~ нев ⇔

$f = 7 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 7} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 8 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 8} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f = 9 \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 9} \in \mathbb{Z}$ – нев.

$f=10$

$f=11$

$f=12$

$f=13$

$f=14$

$f=15$

$f=16$

$f=17$

$f=18$

$f=19$

$f=20$

$f=21$

$f=22$

$f=23$

$f=24$

$f=25$

$f=26$

$f=27$

$f=28$

$f=29$

$f=30$

$f=31$

~~$\Leftrightarrow$~~ $\Leftrightarrow$ $23 \nmid 2f \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 3 \\ 3\cdot 11 \\ 3\cdot 23 \\ 3\cdot 3\cdot 11 \\ 3\cdot 3\cdot 23 \\ 11\cdot 23 \\ 11\cdot 3\cdot 23 \\ 11\cdot 3\cdot 3\cdot 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f = -14 - \text{нев. т.к. } f\in[1;49] \\ 2f = 10 \\ 2f = 66 \\ 2f = 276 \\ 2f = 184 \\ 2f = 230 \\ 2f = 736 \\ 2f = 2254 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f=5 \\ f=23 \\ f=38 \\ f=92 - \text{нев. (т.к. } f_2\in[7;49]) \\ f=115 - \text{нев. (т.к } f\in[1;49]) \\ f=368 - \text{нев. (т.к. } f\in[1;49]) \\ f=1472 - \text{нев. (т.к } f\in[1;49]) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=5 \\ f=23 \\ f=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2310 - \text{счас.} \\ n=2346 - \text{счас.} \\ n=2386 - \text{счас.} \end{cases}$

6. Из n_2 и n_5 $\Rightarrow$ всего есть **4 счастливых n**

Ответ: 4

(2)