425655
Регистрационный номер

Фамилия Бурмистрова
Имя Елизавета
Отчество Михайловна

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

**Вариант 1**

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.
2. Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением $x$.
3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+a/2$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада ЮНИОР

Работа по физике / математике

Дата 06.04.2024г.
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
*ФИО и рег. номер не указывать!*

**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ИТОГО | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | | | | 3 | |

№1

$a, b, c, d, \ldots > 0$

$a^2 = b + c$

$b^2 = c + d$

Если $b < a$, то $a^2 > b^2$

$b + c > c + d$

$b > d$

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{2023} > 0$

$a_1^2 = a_2 + a_3$

$a_2^2 = a_3 + a_4$

...

1) Если $a_2 < a_1$, то $a_1^2 > a_2^2$

$a_2 + a_3 > a_3 + a_4$

$a_2 > a_4$

Если $a_3 > a_4$, то $a_3^2 > a_4^2$

$a_4 + a_5 > a_5 + a_6$

$a_3 > a_4 > a_6$

а если $a_3 < a_4$?

=> числа убывают => $a_{2023} < a_1$

$a_{2023}^2 < a_1^2$

$a_1 + a_2 < a_2 + a_3$

$a_1 < a_3$

противоречие!

2) Если $a_2 > a_1$, то $a_2^2 > a_1^2$

$a_3 + a_4 > a_2 + a_3$

$a_4 > a_2 > a_1$

Если $a_3 > a_2$, то $a_3^2 > a_2^2$

$a_4 + a_5 > a_3 + a_4$

а если $a_3 < a_2$? $a_5 > a_3 > a_2$

=> числа возрастают => $a_{2023} > a_1$ => $a_1 + a_2 > a_2 + a_3$ => $a_1 > a_3$

противоречие

3) $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{2023}$

при $a=1$: $1^2 = 1+1$, $1 \neq 2$ $\Rightarrow$ не подходит

при $a=2$: $2^2 = 2+2$, $4=4$ $\Rightarrow$ подходит

при $a=3$: $3^2 \neq 3+3$, $9 \neq 6$

$f(a) = a^2$

$f'(a) = 2a$ — возрастающая функция

$a_1^2 = 2a_1$

$a^2 = 2a$

$a^2 - 2a = 0 \quad | : a \neq 0$

$a - 2 = 0$

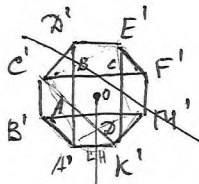
$a = 2$

Ответ: $2 \cdot 2023 = 4046$

(2) Неправильное использование области!

Не следует из предыдущего!

№3




$\angle A' + \angle B'M'K' = 180°$

$\angle A' + \angle B'C'K' = 180°$

$\Rightarrow \angle B'M'K' = \angle B'C'K'$

Вокруг $A'B'C'D'E'F'M'K'$ можно описать окружность $\Rightarrow$ правильный

$\Rightarrow ABCD$ - правильный $\Rightarrow ABCD$ - квадрат

$R$ - радиус окр., опис. около восьмиуг.

$R = OA' = \sqrt{OH^2 + A'H^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{(1+a)^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{1 + 2a + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + 2a + 1} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow 5a^2 + 8a + 4 = 20$

$5a^2 + 8a - 16 = 0$

$D = 64 + 320 = 8^2 \cdot 6$

$a = \frac{-8 \pm 8\sqrt{6}}{10}$

$a > 0 \Rightarrow a = \frac{-8 + 8\sqrt{6}}{10}$

$S_{ABCD} = a^2 = \left(\frac{8(\sqrt{6}-1)}{10}\right)^2 = \frac{64 \cdot 6 - 2 \cdot 64\sqrt{6} + 64}{100} = \frac{64(6 - 2\sqrt{6} + 1)}{100} =$

$= \frac{16}{25}(5 - 2\sqrt{6})$.

(3)

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада юниор

Работа по ~~физике~~ / математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
*ФИО и рег. номер не указывать!*

**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ИТОГО | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

№2 $x, y \in \mathbb{Z}$ $3x+5 = [\lg(10^y \cdot 2^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 2^x]]$.

$[10^{3y} \cdot 2^x] > 0$

$10^{3y} \cdot 2^x \geq 1$ только ОДЗ!

1) $y=0$: $3x+5 = [\lg(2^x)] - [\lg[2^x]]$. (1)

$2^x \geq 1$

$x \geq 0 \Rightarrow 3x+5 \geq 5 > 0 \Rightarrow [\lg(2^x)] > [\lg[2^x]]$.

$(2^x) > [2^x]$.

$\varnothing$

при $x \in \mathbb{Z}$ реш. нет

2) $y \neq 0 \Rightarrow 10^y < 10^{3y}$

$\lg(10^y \cdot 2^x) < \lg[10^{3y} \cdot 2^x] \Rightarrow 3x+5 < 0$

$3x < -5$

$x < -\frac{5}{3}$

$x = -\frac{5}{3}$: $x \leq -2$

$x = -2$: (1)

3) ~~$y < 0$~~

Ответ не получен

Лист 2 из 2

425655
Регистрационный номер

Фамилия Бурмистрова
Имя Елизавета
Отчество Михайловна

657
(не заполнять)

Подпись

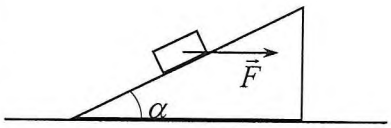
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

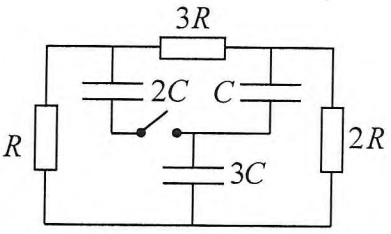
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

**1.** В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающем хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м$^3$, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · град). Ответ обосновать.

**2.** На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании $\alpha$. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу $F$. Трение между телом и клином отсутствует. $m$, $\mu = 0$




**3.** Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов $R$, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов $C$, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом $q$ (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты $Q_R$, $Q_{2R}$ и $Q_{3R}$ выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?




Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 657
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада ЮНИОР

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

**ФИО и рег. номер не указывать!**

**ОЦЕНКА**
(не заполнять)

| 5 | 2 | 0 | 7 |
|---|---|---|---|

№1

Дано:
$V = 20$ л
$V_0 = 0{,}5$ л
$t = 20°C$
$p_m = 10^6$ Па
$t_m = ?$
$\rho = 800$ кг/м³
$\mu = 28$ г/моль
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·град)

Решение:

1) $\nu = \frac{m}{\mu}$; $\rho = \frac{m}{V_0} \Rightarrow m = \rho V_0 \Rightarrow \nu = \frac{\rho V_0}{\mu}$

2) $pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\rho V_0 RT}{\mu V} =$

$= \frac{800 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = \frac{4 \cdot 831 \cdot 293}{28 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = \frac{831 \cdot 293}{140 \cdot 10^{-3}}$

$\frac{831 \cdot 293}{140} \cdot 10^3 > 10^3 \cdot 10^3$

$\frac{831 \cdot 293}{14} > 10^4$

$\approx 14182$

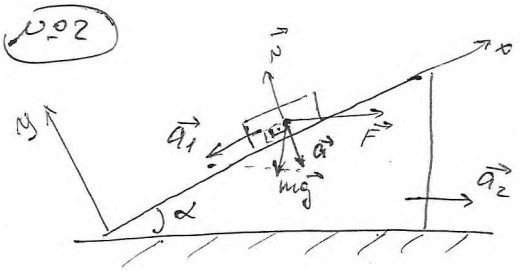
$\Rightarrow$ сосуд разорвёт

3) $p_m V = \nu R T_m \Rightarrow T_m = \frac{p_m V}{\nu R} = \frac{p_m V \cdot \mu}{R \rho V_0} = \frac{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 800 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} =$

$= \frac{20 \cdot 28 \cdot 10^3}{831 \cdot 4} = \frac{140 \cdot 10^3}{831} \approx 168$ К $= -105°C$

Ответ: разорвет, при $t_m = -105°C$

№2




1) $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$
$\vec{a_1} \perp \vec{a_2}$

2) OX: $ma_1 = mg\sin\alpha - F\cos\alpha$
OY: $N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$

3) $F = (m + M)a_2$

$a^2 + a_1^2 = a_2^2$

$\sin\alpha = \frac{a}{a_2} \Rightarrow a = a_2 \sin\alpha$

$(a_2\sin\alpha)^2 + a_1^2 = a_2^2$

$a_2^2(\sin^2\alpha - 1) + a_1^2 = 0$

$a_2^2(\sin^2\alpha - 1) = -a_1^2$

$a_2^2(1 - \sin^2\alpha) = a_1^2$

$a_2^2 \cdot \cos^2\alpha = a_1^2$

$\left(\frac{F}{m+M}\right)^2 \cdot \cos^2\alpha = g\sin\alpha - \frac{F\cos\alpha}{m}$

$\frac{mF^2\cdot\cos^2\alpha}{m(m+M)^2} + \frac{F\cos\alpha(m+M)^2}{m(m+M)^2} = g\sin\alpha \quad / \cdot m(m+M)^2$

~~$F\cos\alpha\left(\frac{F\cos\alpha}{m(m+M)^2} + \frac{(m+M)^2}{m(m+M)^2}\right) = g\sin\alpha$~~

$F^2 \cdot m \cdot \cos^2\alpha = mg\sin\alpha(m+M)^2 - F\cos\alpha(m+M)^2$

$F^2 m\cdot\cos^2\alpha + F\cos\alpha(m+M)^2 - mg\sin\alpha(m+M)^2 = 0$

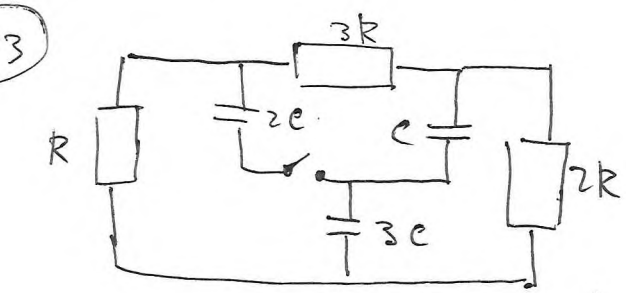
$\Delta = (m+M)^4\cdot\cos^2\alpha + 4m\cdot\cos\alpha\cdot mg\sin\alpha(m+M)^2$

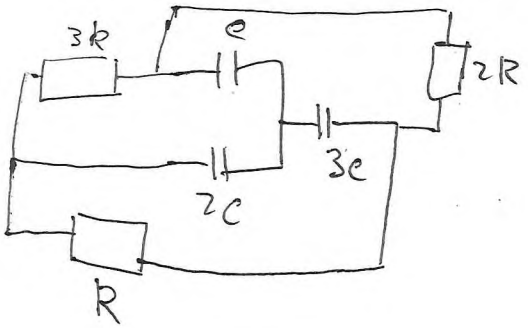
$F = \frac{-(m+M)^2\cos\alpha \pm (m+M)\sqrt{(M+m)^2\cos^2\alpha + 4m^2 ctg\alpha}}{2m\cos^2\alpha}$

(2)

(1)

№3




$Q = \cancel{\text{IUR}} \quad IUt = \frac{U^2 t}{R}$

$C = \frac{q}{U}$

Сосу =

(0)