343

398368
Регистрационный номер

Фамилия Кулешова
Имя Софья
Отчество Ильинична

(не заполнять)
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\cos a\cdot(x-\cos a)^2+\operatorname{tg} a\cdot(x-\operatorname{tg} a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 343
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24.
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	0	1				2	

с 2201 до 2300.

n - счастливое, если $n // 100 + n \% 100 = k$, где $n \vdots k$.

$n = 100b + a$; если $n \vdots (b+a)$, то n - счастливое.

Все рассматриваемые числа при делении на 100 дадут в частном 22 или 23 (для последнего: 2300)

$\Rightarrow n \vdots (22 + a)$ (1)

Сразу проверим последнее: $2300 : 100 = 23$ (ост. $= 0$)

$2300 \vdots (23+0)$ - верно $\Rightarrow n = 2300$ - счастливое

Вернемся к выражению (1). Необходимо найти числа, делители которых больше 22. Причем $a \in [0; 99)$, $a \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow (22+a)_{max} = 121$.

Между 2201 и 2300 99 чисел. Из них $49 + 1 = 50$. нечетных 49 четных.

$b = \frac{n-a}{100} \Rightarrow a + b = a + \frac{n-a}{100} = \frac{100a + n - a}{100} = \frac{99a + n}{100}$.

$a + b \in \mathbb{Z}$; $\Rightarrow (99a + n) \vdots 100$

$n \in [2201 ; 2300]$, $n \in \mathbb{Z}$. $a \in [0; 99]$, $a \in \mathbb{Z}$

$99a + n = \overline{\ldots 00}$

?

И дальше?

1

Лист 1 из 2

1

$\cos a\,(x-\cos a)^2 + \operatorname{tg} a\,(x-\operatorname{tg} a)^2 = 0.$

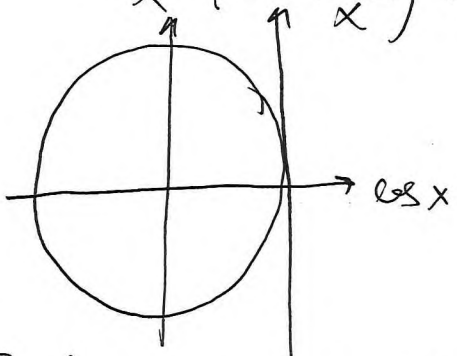
$\cos a \neq 0.$; $\cos a \in [-1;1] \setminus \{0\}$.

$\cos a\,(x-\cos a)^2 = -\operatorname{tg} a\,(x-\operatorname{tg} a)^2$

$(x-\cos a)^2 \geq 0$; $(x-\operatorname{tg} a)^2 \geq 0$.

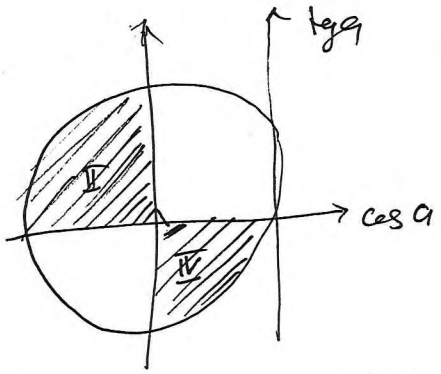
Если $x = \cos a$

$\frac{\sin a}{x}\left(x-\frac{\sin a}{x}\right)^2 = 0$. – больше 1 реш.



При $x \neq \cos\alpha$; $x \neq \operatorname{tg}\alpha$, $\cos a$ и $\operatorname{tg} a$ разных знаков

$\Rightarrow$ возможные ~~[illegible]~~ а в таком случае лежат в II и IV четв.



$D_1 = (\operatorname{tg}^2 a + \cos^2 a)^2 - (\cos a + \operatorname{tg} a)(\cos a + \operatorname{tg} a)(\cos^2 a - \cos a \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 a) = 0$

$\operatorname{tg}^4 a + \cos^4 a + 2\operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - (\cos a + \operatorname{tg} a)^2 (\cos^2 a - \sin a + \operatorname{tg}^2 a) = 0$

$\operatorname{tg}^4 a + \cos^4 a + 2\operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - (\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a + 2\cos a \operatorname{tg} a) \cdot (\cos^2 a - \sin a + \operatorname{tg}^2 a) = \operatorname{tg}^4 a + \cos^4 a + 2\operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - (\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a + 2\sin a)(\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a - \sin a) = \operatorname{tg}^4 a + \cos^4 a + 2\operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - (\cos^4 a + \cos^2 a(\operatorname{tg}^2 a + 2\sin a) + \operatorname{tg}^2 a(\cos^2 a + 2\sin a) + \operatorname{tg}^4 a = \sin a(\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 a + 2\sin a) =$

$= 2\operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - \cos^2 a \operatorname{tg}^2 a - \cos^2 a \cdot 2\sin a - \operatorname{tg}^2 a \cos^2 a - 2\operatorname{tg}^2 a \sin a + \sin a \cos^2 a + \sin a \operatorname{tg}^2 a - 2\sin^2 a =$

$= -2\cos^2 a \sin a - 2\operatorname{tg}^2 a \sin a + \sin a \operatorname{tg}^2 a + \sin a \cos^2 a - 2\sin^2 a.$

ШИФР: 343
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24

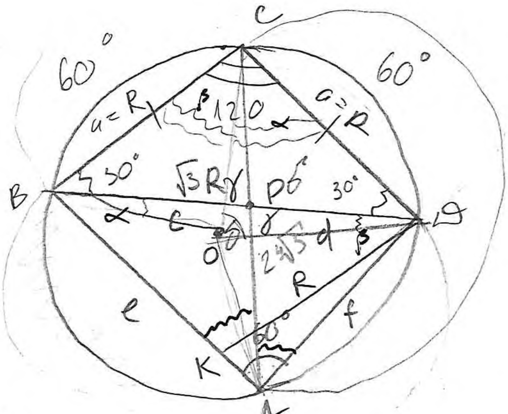
Вариант №

Площадка написания: ИИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись



1) $A, B, C, D \in \omega \Rightarrow ABCD$ — впис. ⇒ по св. впис. 4-х уг-ника $\angle BCD + \angle BAD = 180°$ ⇒ $\angle BCD = 120°$ ⇒ $\angle BDC = \angle DBC = 30°$ т.к. $\triangle BCD$ - р/б (по усл.)

2) По сл. из т. синусов: (если $CD = CB = a$) $\frac{a}{\sin 30°} = 2a = 2R \Rightarrow R = a$. для $\triangle BCD$

3) Для $\triangle CDA$: по сл. из т. синусов: $\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{R}{\sin\angle CAD} = 2R$ ⇒ $\sin\angle CAD = \frac{1}{2}$, т.к. этот угол острый, то $\angle CAD = 30°$.
⇒ $\angle BAC = 60° - \angle CAD = 60° - 30° = 30°$

4) $BP \cdot PD = CP \cdot AP$ (по св. пересек. хорд.)
Из $\triangle BCD$: $BD^2 = R^2 + R^2 - 2R^2(-\frac{1}{2}) = 2R^2 + R^2 = 3R^2$
$BD = \sqrt{3}R$.

5) $\angle BAP = \angle DAP = 30°$ ⇒ AP — бис. ⇒ по св. бис. $\frac{PD}{AD} = \frac{BP}{AB}$.
$\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$ ⇒ $cf = de$. ⇒ $PD \cdot AB = AD \cdot BP$.

6) ~~~~

6)

?

(1)

Лист 2 из 2

(4)

$tg^2a \sin a - \sin a \cos^2 a - 2\sin^2 a = 0$

$\sin a \left(tg^2 a + \cos^2 a + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin a = 0 \\ tg^2 a + \cos^2 a + 2 = 0. \quad (*) \end{array}\right. \\ \cos a \neq 0 \end{cases}$

$tg^2 a \geq 0$

$\cos^2 a \geq 0$

398368
Регистрационный номер

Фамилия Кулешова
Имя Софья
Отчество Ильинична

726
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

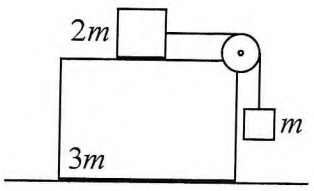
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0,5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль $\cdot$ град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0,18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0,21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0,14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 726
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24.

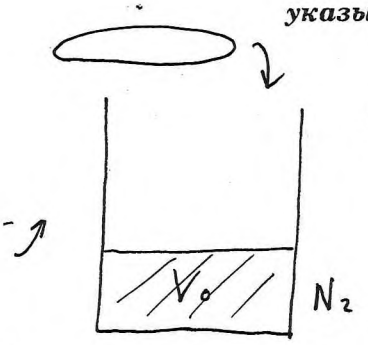
Вариант № _____

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись



$V,\ V_0,\ t = 20°C;\ p_m = 1\cdot10^6$ Па.; $\rho_ж \approx \rho$; μ

1) $m = V_0\rho$

2) $pV = \nu RT$

$pV = \frac{m}{\mu}RT = \cancel{\frac{V_0\rho}{\mu V}RT}\ \frac{V_0\rho}{\mu}RT$

$p_t = \frac{V_0\rho}{\mu V}Rt = \cancel{\frac{0,5\cdot800}{28}\cdot8,31\cdot(273+20) = \frac{400}{28}\cdot8,31\cdot293 = \frac{100}{7}\cdot8,31\cdot293 = \frac{8,31\cdot293}{7}}$

$\mu = 28$ г/моль. $= 28\cdot10^{-3}$ кг/моль.

$p_t = \frac{0,5\cdot\cancel{10^{-3}}\cdot800}{28\cdot10^{-3}\cdot20\cdot\cancel{10^{-3}}}\cdot8,31\cdot293 = \frac{4\cdot831\cdot293}{28\cdot20}\cdot10^3 =$

$= \frac{831\cdot293}{7\cdot2}\cdot10^2 \approx 18820\cdot10^2 = 1882000 = 1,882\cdot10^6$ Па $> 1\cdot10^6$ Па $= p_m$

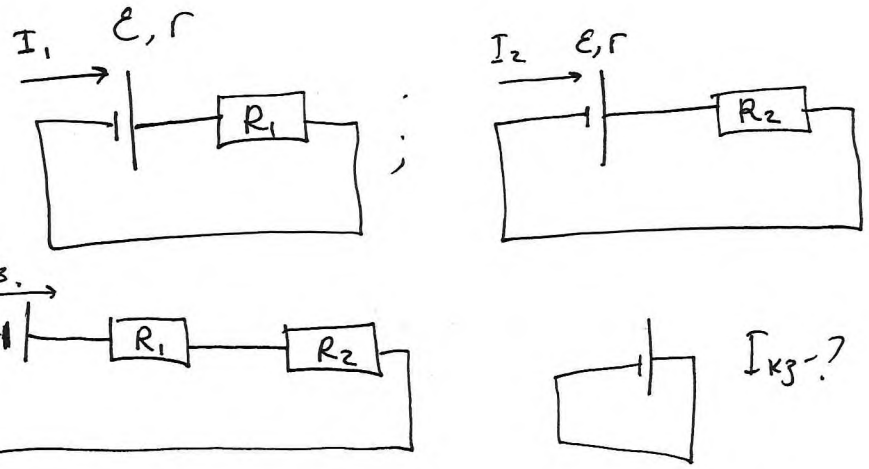
$\Rightarrow$ сосуд разорвёт

3) $\cancel{p_mV = \nu RT_x \Rightarrow T_x = \frac{p_mV}{\frac{m}{\mu}R} = \frac{10^6\cdot20\cdot10^{-3}}{\frac{0,5\cdot10^{-3}\cdot800}{28\cdot10^{-3}}\cdot8,31} = \frac{10^3\cdot20}{8,31\cdot\frac{400}{28}} = \frac{2\cdot10^4\cdot7}{8,31\cdot100} = \frac{14\cdot10^2}{8,31} = \frac{14\cdot10^4}{831} =}$

Лист 1 из 2

4б

1



4) $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1}$; $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_2}$; $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1+R_2}$; $I_{кз} = \frac{\mathcal{E}}{r}$

$$\begin{cases} I_1(r+R_1) = \mathcal{E} \\ I_2(r+R_2) = \mathcal{E} \\ I_3(r+R_1+R_2) = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 r + I_1 R_1 = \mathcal{E} \\ I_2 r + I_2 R_2 = \mathcal{E} \\ I_3 r + I_3 R_1 + I_3 R_2 = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1} \\ R_2 = \frac{\mathcal{E} - I_2 r}{I_2} \\ I_3 r + \frac{I_3(\mathcal{E}-I_1 r)}{I_1} + \frac{I_3(\mathcal{E}-I_2 r)}{I_2} = \mathcal{E} \end{cases}$$

(*): $I_3 r + \frac{I_3(\mathcal{E}-I_1 r)}{I_1} + \frac{I_3(\mathcal{E}-I_2 r)}{I_2} = \mathcal{E}. \quad | \cdot I_1 I_2.$

$I_1 I_2 I_3 r + I_2 I_3(\mathcal{E} - I_1 r) + I_1 I_3(\mathcal{E} - I_2 r) = \mathcal{E} I_1 I_2.$

$I_1 I_2 I_3 r + I_2 I_3 \mathcal{E} - I_1 I_2 I_3 r + I_1 I_3 \mathcal{E} - I_1 I_2 I_3 r = \mathcal{E} I_1 I_2.$

$I_2 I_3 \mathcal{E} + I_1 I_3 \mathcal{E} - I_1 I_2 \mathcal{E} = I_1 I_2 I_3 r.$

$\mathcal{E}(I_2 I_3 + I_1 I_3 - I_1 I_2) = I_1 I_2 I_3 r \Rightarrow I_{кз} = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{I_1 I_2 I_3}{I_2 I_3 + I_1 I_3 - I_1 I_2} =$ (+)

$= \frac{0,18 \cdot 0,21 \cdot 0,14}{0,21 \cdot 0,14 + 0,18 \cdot 0,14 + 0,18(-0,24)} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 18 \cdot 21 \cdot 14}{10^{-4} \cdot 21 \cdot 14 + 10^{-4} \cdot 18 \cdot 14 - 10^{-4} \cdot 18 \cdot 24} =$

$= \frac{10^{-6} \cdot 18 \cdot 14 \cdot 21}{10^{-4}(21 \cdot 14 + 18 \cdot 14 - 18 \cdot 21)} = 10^{-2} \cdot \frac{18 \cdot 14 \cdot 21}{21 \cdot 14 + 18 \cdot 14 - 18 \cdot 21} = 10^{-2} \frac{18 \cdot 14 \cdot 21}{21 \cdot 14 - 18 \cdot 7} =$

$= 10^{-2} \frac{18 \cdot 14 \cdot 21}{7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 - 18 \cdot 7} = 10^{-2} \cdot \frac{7 \cdot 2 \cdot 21 \cdot 18}{7(42-18)} = 10^{-2} \cdot \frac{42 \cdot 18}{24} = 10^{-2} \cdot \frac{42 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 6} =$

$= 10^{-2} \cdot \frac{120+6}{4} = 10^{-2} \frac{126}{4} = 31,5 \cdot 10^{-2} = 0,315$ A.

Отв. 0,315 A. (+)

5

ШИФР: 726
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

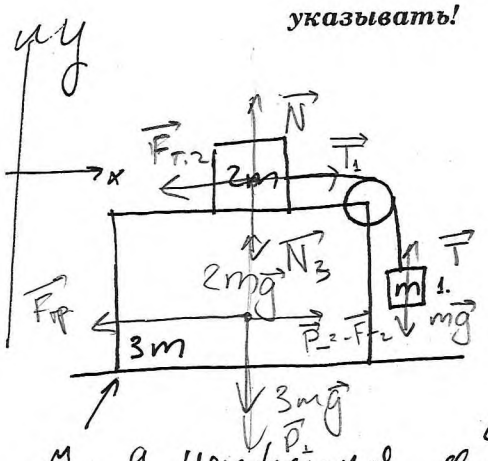
олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись



№3

На 1 тело: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_1$;

$mg - T = ma$; $T = mg - ma$,

~~На 2 тела: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_2$~~

Т.к. веревка нерастяжима и невесома, то сила T одинакова по величине по всей длине связанный ей грузов равны: $a_1 = a_2 = a$

$\vec{T}_1 + \vec{N} + 2m\vec{g} + \vec{F}_{T2} = 2m\vec{a}_2$.

$\cancel{x: T = 2ma}$
$\cancel{y: N = 2mg}$

y: $N = 2mg$. x: $T_1 - F_T = 2ma$.

$T - 2\mu_1 mg = 2ma$; μ_1 – коэф. тр. между 2m и 3m.

$mg - ma - 2\mu_1 mg = 2ma$.

~~$mg = ma$~~ $mg - 2\mu_1 mg = 3ma$.

~~На 3 тело: $3m\vec{g} + \vec{N}_3 + \vec{F}_{тр} = 0$. (т.к. оно неподвижно)~~

На 3 тело: $3m\vec{g} + \vec{N}_3 + \vec{P} + \vec{F}_{тр} = 0$

$3m\vec{g} + \vec{N}_3 + 2m\vec{g} - \vec{F}_{T2} + \vec{F}_{тр} = 0$

y: $N_3 = 3mg + 2mg = 5mg$

x: $F_{T2} - F_{тр} = 0 \Rightarrow$ ~~$5\mu mg = T - 2ma = mg - ma - 2ma = mg - 3ma$~~

$F_{T2} = F_{тр} \Rightarrow 5\mu mg = 2\mu_1 mg \Rightarrow \mu = \frac{2}{5}\mu_1$

Лист 2 из 2

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{при } \mu \geq \frac{2}{5}\mu_1}$, где μ_1 – коэф. трения между большим и средним телом, тело 3m не будет двигаться

Если рассматривать $\mu_1 = 0$, т.е. отсутствие трения между 3m и 2m, то на 3m не будет действовать никакая двигающая сила $= 2\mu$ может быть любым.

13

Пары находятся в сжиженном состоянии при очень низких тем

$$p_m V = \frac{\rho V_0}{\mu} R T_x$$

$$\Rightarrow T_x = \frac{p_m V}{\frac{\rho V_0}{\mu} R} = \frac{p_m V \mu}{\rho V_0 R} = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot \cancel{10^{-3}}}{800 \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{10^{-3}} \cdot 8{,}31} = \frac{28 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 10^{-}}{4 \cdot 831}$$

$$= \frac{10^{-3} \cdot 28 \cdot 5 \cdot 10^6}{831} = \frac{(100+40)\,10^6}{831} = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{831} = \frac{14 \cdot 10^4}{831} = 168\,\frac{292}{831}\ K \approx$$

≈ 168 K.

Отв. При 168 гр. К.

4б

Критерий б4 не выполнен!

С