378575
Регистрационный номер

Фамилия КУЗНЕЦОВ
Имя НИКИТА
Отчество МАКСИМОВИЧ

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по ~~физике~~ математике

Дата 06.04.24.
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2

$x, y \in Z$, x_{max}; $(x; y)$ - ?

$3x+5 = [\lg(10^{3y} \cdot 2^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 2^x]]$

Т.к. $10^{3y} > 0$, $2^x > 0$, то $\lg(10^{3y} \cdot 2^x) = \lg 10^{3y} + \lg 2^x = y + \lg 2^x$.

Т.к. $x, y \in Z$, то $10^{3y} \in Z$ (*) и $2^x \in Z$ (*), тогда сделав равносильный переход ~~$\lg[10^{3y} \cdot 2^x]$~~ ($10^{3y} > 0$, $2^x > 0$), ~~$\lg[10^{3y} \cdot 2^x] = \lg[10^{3y}] + \lg[2^x]$~~

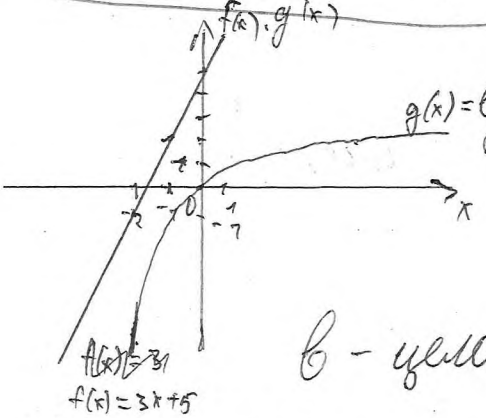
Т.к. $10^{3y}, 2^x \in Z$, то $10^{3y} \cdot 2^x \in Z$ (*) $\Rightarrow [10^{3y} \cdot 2^x] = 10^{3y} \cdot 2^x$:

$\lg[10^{3y} \cdot 2^x] = \lg 10^{3y} + \lg 2^x = 3y + \lg 2^x$.

Запишем исходн. ур-ние с учётом сделанн. преобразований:

$3x+5 = [y + \lg 2^x] - [3y + \lg 2^x]$. Подберём числа.

~~Решение~~



Из графиков видим, что $f(x)$ растёт намного быстрее $g(x) \Rightarrow x_{max}$ не следует искать среди небольших чисел ($x \in Z$), $y \in Z$).

$\lg 2^x$ при $x=2$: $\lg 4 \in (0;1) \Rightarrow [b + \lg 4] = b$, где b - целое число. Аналогично $\lg 2^x$, $x=4 \Rightarrow \lg 16 \in (1;2) \Rightarrow [b + \lg 16] = b$

Теперь подберём нужн. числа: подбирать будем нечётн. x, т.к. при чётн. $x=2$: $3 \cdot 14 = [y + \lg 4] - [3y + \lg 4] = -2y \Rightarrow y \notin Z$
($\lg 4 \in (0;1)$, $\lg 4 \in [0;1)$)

Т.е. при чётн. x число $3x+5$ будет нечётн., чего быть не может, т.к. $y \in Z \Rightarrow$ начнём подбор ↓

$x=5 \Rightarrow 20 = [y + \lg 32] - [3y + \lg 32] \Rightarrow 20 = [y] - [3y] \Rightarrow -20 = -2y \Rightarrow y = 10$

$\lg 32 \in [1;2)$

(*): нужны неотриц. значен. $y \Rightarrow$ берём $x < 0$, x — целое.

$x = -1 \Rightarrow 8 = [y + \dots] - [3y + \dots] \Rightarrow y < 0$

При $x = -1$ получ. положит. значен. $(3x+5)$, но нам нужно отриц. $\Rightarrow$ берём наиб. нечётн. x, при котор. такое возможно

Возьмём $x = 0 \Rightarrow 20 - 5 = y - 2y$?

$x = -3 \Rightarrow -4 = [y + \dots_{\in(0;1)}] - [3y + \dots_{\in(0;1)}] \Rightarrow -4 = -2y \Rightarrow y = 2$

$(-3; 2)$.

№2:

Ответ: $(-3; 2)$ Ответ не обоснован! Не следует из предыдущего. 0

№3

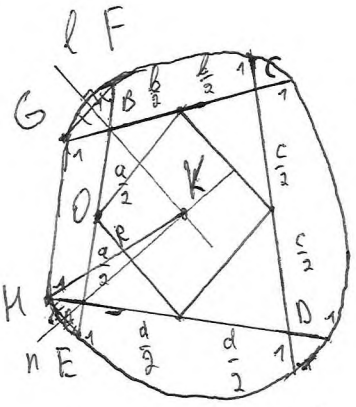
Дано:

ABCD — выпукл. чет-ник

$S = 1 + \frac{a}{2}$

$R = \sqrt{5}$

$S_{ABCD} - ?$



1. ABCD — выпукл. чет-ник $\Rightarrow$ по св-ву выпукл. чет-ника: он лежит по одну сторону от каждой прям., содержащ. его сторону.

2. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d \Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. по услов. $S = 1 + \frac{a}{2}$, a — длина соотв. стороны, S — расстояние от сер. данной стороны до вершины восьмиугольника, то можно пусть O — сер. AB, $OA \cap \omega = E, F \Rightarrow OF = \frac{a}{2} + 1 = OB + FB \Rightarrow FB = 1$.

Аналогично с другими отрезками за вершинами ABCD. $\frac{1}{2}$

3. Пусть K — центр окр-сти $\Rightarrow K = l \cap n$, l, n — ср. $\perp$ к FG и EM соотв., где $E \in G$ и EM — стороны восьмиугольника

4. Пусть N, M, L — сер. сторон BC, CD, AD, соотв., тогда по теореме Вариньона QNML — п-м

5. Около чет-ника можно описать окр-сть и притом только одну, если сумма его противолежащ. $\angle$ равна 180°

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin(AC; BD)$

нет доказ.

0

378575
Регистрационный номер

Фамилия КУЗНЕЦОВ
Имя НИКИТА
Отчество МАКСИМОВИЧ

690
(не заполнять)

Подпись

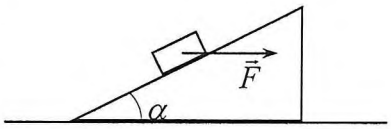
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

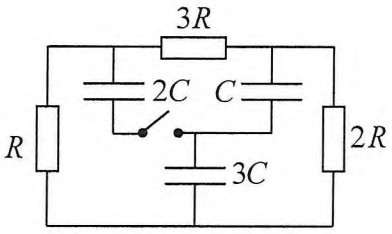
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 640
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по ~~физике~~ физике

Дата 06.04.24

Вариант № _____

Площадка написания: КИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

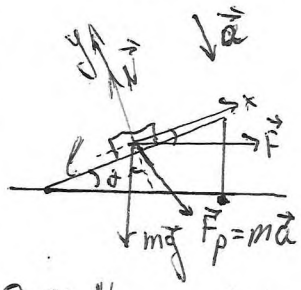
ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	5	2				8	

№2 //

Дано:
α; $\vec{F} = const$
$\vec{a} \perp \ell$; $\frac{M_{ш}}{m} = 0$

$F - ?$



1. Введём oxy. Тогда $\vec{N} \parallel oy \Rightarrow \vec{a} \parallel oy$, $ox \parallel \ell$, ℓ – наклон. поверхн. кл
2. ВЗН (Второй закон Ньютона) для тела:

$\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$

~~Oy: $N - mg\sin\alpha - F\sin\alpha = ma \Rightarrow$~~

ox: ~~$F\cos\alpha = mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg\,ctg\alpha$~~

ox: т.к. $\vec{a} \perp ox$, то $a_x = 0 \Rightarrow ox: F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$

Отсюда: $F = mg\,ctg\alpha$.

Ответ: $F = mg\,ctg\alpha$. ⊕5

№1 //

Дано:
$V = 20$ л
$V_0 = 0{,}5$ л
$t = 20°C$
$p_m = 10^6$ Па
$\rho = 800 \frac{кг}{м^3}$
$\mu = 28 \frac{г}{моль}$
$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$

Найти p_1 и p_m

Дьюар разорвёт, если $p_1 \geq p_m$, где p_1 – конечн. давл. азота в дьюаре.

2). В услов. задачи сказано, что дьюар изначально открыт $\Rightarrow$ температура азота, при которой его закрывают ≈ равняется температур кипения жидкого азота. Пункт (2) не повлияет на ответ!

3). $m_a = const \Rightarrow m_a = \rho V_0$.

Предположим, что азот нагрелся до 20°C и дьюар не разорвал

Тогда $p_1 V_x = \nu R t \Rightarrow p_1 = \frac{\nu R t}{V_x}$, ~~теперь расчитаем, что~~

~~$p_1 = p_m$ при $t_a = T_2 \approx 20°C$, а в этот момент дьюар~~

$V_x = V$, т.к. газ заполняет всё пространство $\Rightarrow p_1 = \frac{m}{\mu V} R t = \frac{\rho V_0 R t}{\mu V} =$

$= \frac{800 \frac{кг}{м^3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} м^3 \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot (20 + 273 К)}{28 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \approx 1738 \cdot 10^2 Па = 173800 Па < 10^6 Па \Rightarrow p_1 < p_m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ дьюар не разорвёт даже при $t = 20°C$, а значит ответ: нет, не разо

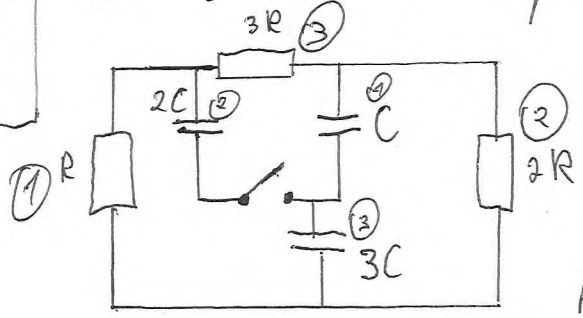
Ответ: нет, не разорвёт. ⊕1

№3 //

Дано:
R, 2R, R
C, 3C, C
q

Q_{1R}, Q_{2R}, Q_{3R} – ?

1). В задаче сказано, что сопротивления конденсаторов и проводов пренебрежимо мало $\Rightarrow$ R и R можно считать, что $R_C = R_{2C} = R_{3C} = R_{пров.} = 0$.



2). При зарядке ② конденсатора зарядом q и замыкании ключа, заряд q начнёт перераспределяться по правилу параллельного подключения конденсаторов:

~~$q_{общ} = q_{1,3} = q_2$~~ ~~$U_{1,3} + U_2 = U \Rightarrow U_1 = U_3 \Rightarrow \frac{q}{C} = \frac{3q}{C} \Rightarrow x = 3y$~~

$C_{1,3} = C + 3C = 4C \Rightarrow C_{общ} = \frac{2C \cdot 4C}{(2+4)C} = \frac{4}{3}C$

$q_{общ} = q$, $q_2 = q_{1,3} = q$, $q_1 + q_3 = q_{1,3}$ $U_{общ} = \frac{q}{\frac{4}{3}C} = \frac{3}{4}\frac{q}{C} = U_2 + U_{1,3}$, $U_1 = U_3 = U_{1,3}$.

$U_2 = \frac{q_2}{2C} = \frac{q}{2C} \Rightarrow U = \frac{3q}{4C} = \frac{q}{2C} + U_{1,3} \Rightarrow U_{1,3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{q}{C}$.

Таким образом, на резистора ① разностью потенциалов (т.е. напряжен. будет $|U_2 - U_3| = \left|\frac{q}{2C} - \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{C}\right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{C}$.

Тогда $Q_R = \frac{(U_{2,3})^2}{R} = \frac{1}{16}\cdot\frac{q^2}{C^2}\cdot\frac{1}{R} = \frac{q^2}{16C^2R}$.

у резистора ③: $|U_2 - U_1| = \frac{q}{2C} - \frac{q}{4C} = \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{C} \Rightarrow Q_{2R} = \frac{(U_{2,1})^2}{2R} = \frac{1}{16}\cdot\frac{q^2}{C^2}\cdot\frac{1}{2R} = \frac{q^2}{32C^2R}$

у резистора ②: $|U_1 - U_3| = \left|\frac{1}{4}\cdot\frac{q}{C} - \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{C}\right| = 0 \Rightarrow$ ток через резистор ② не потечет $\Rightarrow Q_2 = 0$ (Дж)

Ответ: $Q_R = \frac{q^2}{16C^2R}$, $Q_{3R} = \frac{q^2}{32C^2R}$, $Q_2 = 0$ Дж, $Q_3 = \frac{q^2}{16C^2R}$