377340
Регистрационный номер

Фамилия Солдаткин
Имя Всеволод
Отчество Дмитриевич

(не заполнять)

Солдаткин
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	1	0				2	

№1.

Пусть последовательность состоит из чисел:

$x_1; x_2; \dots; x_{2023}$

для всех чисел выполняется:

$x_{n-1}^2 = x_n + x_{n+1}$

причём ~~если~~ т.к. числа записаны по кругу:

$x_{2023}^2 = x_1 + x_2$

$x_{2022}^2 = x_{2023} + x_1$

~~т.к. числа поло~~

~~проверим гипотезу~~ попробуем подобрать последовательность, если $x_1 = 1$:

подобрать положительное число ?!!

$x_1^2 = x_2 + x_3$

$1^2 = x_2 + x_3$; $1 = x_2 + x_3$

т.к. все числа положительные, то $0 < x_2 < 1$

$0 < x_3 < 1$, но в таком случае:

$\left.\begin{array}{l} x_2^2 < 1 \\ x_2^2 = x_3 + x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_4 < \cancel{x_3}\ 1$

$\left.\begin{array}{l} x_3^2 < 1 \\ x_3^2 = x_4 + x_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{x_4}\ x_5 < 1$

аналогично рассуждая мы придём к тому, что $x_{2023} < 1$

~~x_{202}~~

$x_{2023}^2 = x_1 + x_2 = 1 + x_2$

$\left.\begin{array}{l} x_{2023}^2 < 1 \\ 1 + x_2 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ противоречие

Это не обоснование!

если $x_1 = 2$:

$x_1^2 = 4 = x_2 + x_3$

1) если $x_2 \neq x_3$:

$x_2 = 1 \quad x_3 = 3$ (пример)

$x_2^2 = 1 = x_3 + x_4 = 3 + x_4$ – невозможно, т.к. $x_4 > 0$

2) если $x_2 = x_3$:

$x_2 = x_3 = 2$

$x_2^2 = x_3 + x_4 = 2 + x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2$

аналогично рассуждая придём к выводу, что $x_{2023} = 2$

$x_{2023}^2 = 4 = x_1 + x_2 = 2 + 2 = 4$

$\Rightarrow$ если все числа будут равны 2 условие выполнится

если $x_1 > 2$

например $x_1 = 3$:

$x_1^2 = 9 = x_2 + x_3$

Очевидно, что ~~Как уже было выяснено~~, необходимо, чтобы числа в последовательности не убывали и не возрастали монотонно, т.к. иначе последовательно не замкнётся в круг.

$x_2 = x_3 = 4{,}5$

$x_2^2 = 20{,}25 = x_3 + x_4 = 4{,}5 + x_4 \Rightarrow x_4 = 15{,}75$

аналогичными рассуждениями получим, что последовательность будет возрастать, а значит условие не выполнится $\Rightarrow$ возможен только случай, когда последовательность состоит только из 2 и её сумма: $2 \cdot 2023 = 4046$

Ответ: 4046

1

Недостат. обоснование!

Это не обоснование!

№.

$3x + 5 = [\lg(10^y \cdot 2^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 2^x]]$

~~т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$~~

$3x + 5 = \left[\lg\left(\frac{10^y \cdot 2^x}{[10^{3y} \cdot 2^x]}\right)\right]$

$3x + 5 = [\lg 10^y + \lg 2^x - \lg[10^{3y}] - \lg[2^x]]$

~~$3x + 5 = [y + x\lg 2 - \lg[10^{3y}] - \lg[2^x]]$~~

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

~~при x > 3 : 3x + 5 = [y + x lg 2 - lg [10^3 y] - lg~~

Заметим, что функции

$f(x) = \lg 2^x$

$g(x) = \lg [2^x]$ – возрастают почти одинаково при $x \geq 0$, но при $x < 0$ $\lg [2^x] = \lg 0$ – не определено $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \geq 0$

аналогично функции:

$h(y) = \lg 10^y$

$l(y) = \lg [10^{3y}]$ – возрастают при $y \geq 0$, но при $y < 0$:

$\lg [10^{3y}] = \lg \emptyset$ – не определено $\Rightarrow y \geq 0$

при учёте $x \geq 0$ и $y \geq 0$ и $x \in z$; $y \in Z$:

$3x + 5 = [\lg 10^y + \lg 2^x - \lg 10^{3y} - \lg 2^x]$

$3x + 5 = [\lg \frac{10^y}{10^{3y}}]$

$3x + 5 = [\lg 10^{-2y}]$

$3x + 5 = [-2y]$

т.к. $y \geq 0$ и $y \in z$:

$3x + 5 = -2y$

$x = \frac{-2y-5}{3}$

$x = -\frac{2y+5}{3}$

~~$\frac{3x}{2y+5} = -1$, что невыполнимо при $x \geq 0$ и $y \geq 0$~~

№2.

$$3x+5 = [\lg(10^y \cdot 2^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 2^x]]$$

~~$f(x;y) = \lg(10^y 2^x)$~~

~~$g(x;y) = \lg[10^{3y} 2^x]$~~

~~$g(x;y) = \lg[10^{3y} \cdot 2^x]$~~

Ограничение:

$10^y \cdot 2^x > 0$

$[10^{3y} \cdot 2^x] > 0$

это выполнено всегда!

$$3x+5 = [\lg(10^y \cdot 2^x) - \lg[10^{3y} \cdot 2^x]]$$

$$3x+5 = \left[\lg\left(\frac{10^y \cdot 2^x}{[10^{3y} \cdot 2^x]}\right)\right] = \left[\lg\left(\frac{10^y}{[10^{3y}]} \cdot \frac{2^x}{[2^x]}\right)\right]$$

это мы этим следуя!

~~$1 \leq \frac{2^x}{[2^x]} \leq 2$~~ если $y < 0$ и $x < 0$:

~~10^y~~ $[10^{3y} \cdot 2^x] = 0 \Rightarrow$ ограничение не выполнится

если $y < 0$ и $x \geq 0$:

$$[10^{3y} \cdot 2^x] > 0$$

$$10^{3y} < \frac{1}{2^x}$$

$$10^{3y} < 2^{-x}$$

$$2^{\lg_2 10 \cdot 3y} < 2^{-x}$$

$$3y \cdot \lg_2 10 < -x$$

$$y < -\frac{x}{3 \cdot \lg_2 10}$$

если $y \geq 0$ и ~~y~~ $x < 0$:

$$x < -3y \lg_2 10$$

если $x \geq 0$ и $y \geq 0$:

$$3x+5 = \left[\lg\left[\frac{10^y}{10^{3y}} \cdot \frac{2^x}{2^x}\right]\right]$$

$$3x+5 = [-2y]$$

ШИФР: ____________
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 1
Площадка написания:
НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

$3x+5=-2y$ ⇒ x и y будут иметь разные знаки ⇒

⇒ невозможен случай $x \geq 0$ и $y \geq 0$

т.к. нужен x_{max}, то рассмотрим случай $x \geq 0$ и $y < 0$.

$$y < -\frac{x}{3\log_2 10}$$

$$3x+5 = \left[\lg(10^y \cdot 2^x) - \lg[10^{3y}\cdot 2^x]\right]$$

$$3x+5 = [-2y]$$

$$-2y = 3x+5$$

$$y < -\frac{x}{3\log_2 10}$$

$$-\frac{3x+5}{2} < -\frac{x}{3\log_2 10}$$

$$\frac{3x+5}{2} > \frac{x}{3\log_2 10}$$

$$(3x+5)\,3\log_2 10 > 2x$$

$$9\log_2 10\, x + 15\log_2 10 > 2x$$

$$(9\log_2 10 - 2)\,x > -15\log_2 10$$

$$x > -\frac{15\log_2 10}{9\log_2 10 - 2} \Rightarrow x > -2$$

$$3 < \log_2 10 < 4$$

неравенство – проверки нечего не найдено!

1

Лист 3 из 3

377340
Регистрационный номер

Фамилия Солдаткин
Имя Всеволод
Отчество Дмитриевич

636
(не заполнять)

Солдаткин
Подпись

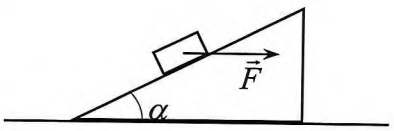
ЮНИОР

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

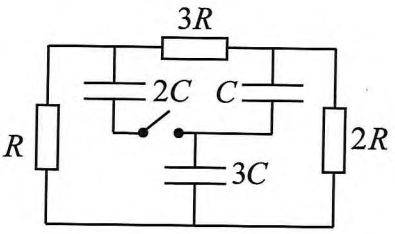
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 636
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
5	5	3				13	

№1.

Дано:

$V = 20\ л$

$V_0 = 0{,}5\ л$

$T = 20 + 273 = 293\ K$

$p_m = 10^6\ Па$

$\rho = 800\ \frac{кг}{м^3}$

$\mu = 28\ \frac{г}{моль}$

$R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot K}$

$t_1 = ?$

Си
$0{,}02\ м^3$
$5 \cdot 10^{-4}\ м^3$
$28 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

Решение:

$m = \rho \cdot V_0 = 800 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}4\ кг$ – масса азота

если весь азот испарится:

$p \cdot V = \frac{m}{\mu} RT$

$p = \frac{mRT}{\mu \cdot V} = \frac{0{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}02} = \frac{200 \cdot 831 \cdot 293}{28 \cdot 2} =$

$\frac{100 \cdot 831 \cdot 293}{14} = \frac{24348300}{14} = \frac{12174150}{7}$

$831 \times 293 = 2493 + 7479 + 1662 = 243483$

$p_m = \frac{7 \cdot 10^6}{7} < \frac{12174150}{7} = p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сосуд Дьюара разорвёт и произойдёт это при температуре:

$T_1 = \frac{p_m \cdot V \cdot \mu}{m \cdot R} = \frac{10^6 \cdot 0{,}02 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0{,}4 \cdot 8{,}31} = \frac{50 \cdot 28}{8{,}31} = \frac{1400}{8{,}31} \approx 169\ K$

1400 | 831
140000 | 168,8...
-831
5690
-4986
7140
-6648
6920
-6648
...

$t_1 = T_1 - 273 = 169 - 273 = -104°C$

Ответ: сосуд разорвёт при температуре $t_1 = -104\,^\circ C$

№2.

Дано:

α

$g = 10 \frac{м}{с^2}$

m

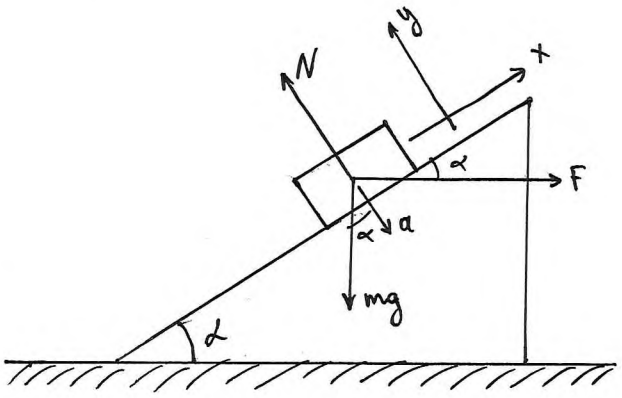
$F = ?$

Решение:

по 2-му закону Ньютона:

$Ox: F \cdot \cos\alpha - mg \cdot \sin\alpha = 0$

$F = mg\,tg\,\alpha$



Ответ: $F = m \cdot g \cdot tg\,\alpha$ +5

№3.

Дано:

R

$2R$

$3R$

C

$3C$

q

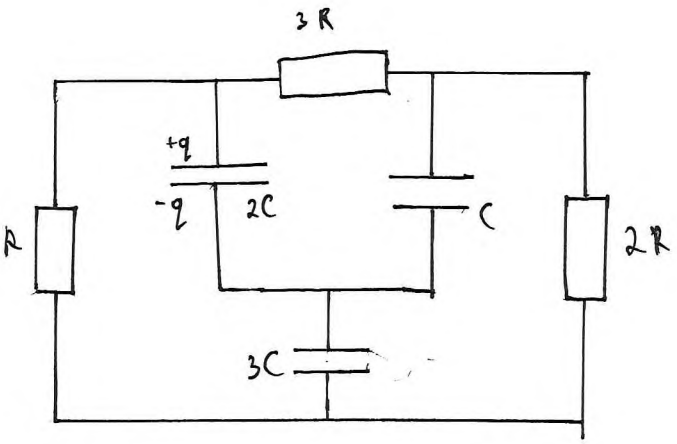
$I_R; Q_{2R}; Q_{3R} = ?$

Решение:

$W_0 = \frac{q^2}{2 \cdot 2C} = \frac{q^2}{4C}$ - начальная энергия системы

после замыкания ключа общая ёмкость системы конденсаторов:

$2C +$



после замыкания ключа заряд будет перераспределяться между конденсаторами до тех пор, пока напряжения на каждом из них не выровняется и ток перестанет течь через резисторы:

$\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{2C} = \frac{q_3}{3C}$

$q_1 + q_2 + q_3 = q$

q_1; q_2; q_3 - конечные заряды конденсаторов.

~~$4q_1 = 2q_2 = q_3$~~

$q_1 = \frac{q_2}{2} = \frac{q_3}{3}$

$q_2 = 2q_1 = \frac{2}{3} q_3$

$\frac{q_3}{3} + \frac{2}{3} q_3 + q_3 = q$

$q_3 = \frac{q}{2}$

В I случае ток не идёт через 3R $\Rightarrow Q_{3R} = 0$

Согласно закону Джоуля-Ленца теплота, выделяемая на конденсаторе прямопропорциональна силе тока и сопротивлению $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Q_{2R}}{Q_{1R}} = \frac{2R}{R} = 2$$

$$Q_{1R} + Q_{2R} = \Delta W = \frac{1}{6} \frac{q^2}{C}$$

$$3Q_{1R} = \frac{1}{6} \frac{q^2}{C}$$

$$Q_{1R} = \frac{1}{18} \frac{q^2}{C}$$

$$Q_{2R} = \frac{1}{9} \frac{q^2}{C}$$

Во II случае ток не идёт через R $\Rightarrow Q_{1R} = 0$

Согласно закону Джоуля-Ленца:

$$\frac{Q_{3R}}{Q_{2R}} = \frac{3R}{2R} = \frac{3}{2}$$

$$Q_{2R} + Q_{3R} = \Delta W = \frac{1}{6} \frac{q^2}{C}$$

$$\frac{3}{2} Q_{2R} + Q_{2R} = \frac{1}{6} \frac{q^2}{C}$$

$$\frac{5}{2} Q_{2R} = \frac{1}{6} \frac{q^2}{C}$$

$$Q_{2R} = \frac{1}{15} \frac{q^2}{C}$$

$$Q_{3R} = \frac{1}{10} \frac{q^2}{C}$$

3

Ответ: $Q_{1R} = \frac{1}{18} \frac{q^2}{C}$; $Q_{2R} = \frac{1}{9} \frac{q^2}{C}$; $Q_{3R} = 0$

или

$Q_{1R} = 0$; $Q_{2R} = \frac{1}{15} \frac{q^2}{C}$; $Q_{3R} = \frac{1}{10} \frac{q^2}{C}$

ШИФР: 636
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.24
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

$q_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{q}{2} = \frac{q}{3}$

$q_1 = \frac{q}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q}{6}$

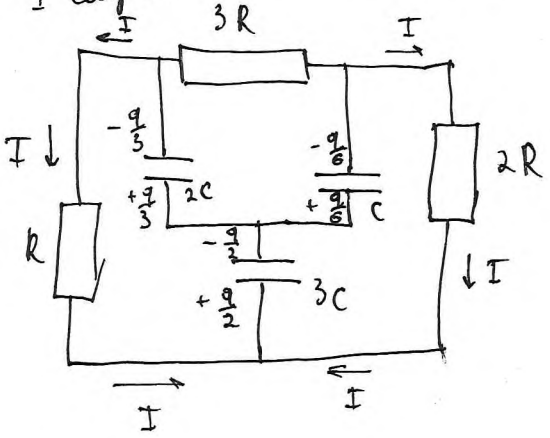
Конечная энергия системы конденсаторов:

$W_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{4C} + \frac{q_3^2}{6C} = \frac{q^2}{72C} + \frac{q^2}{36C} + \frac{q^2}{24C} = \frac{6}{72}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{12}\frac{q^2}{C}$

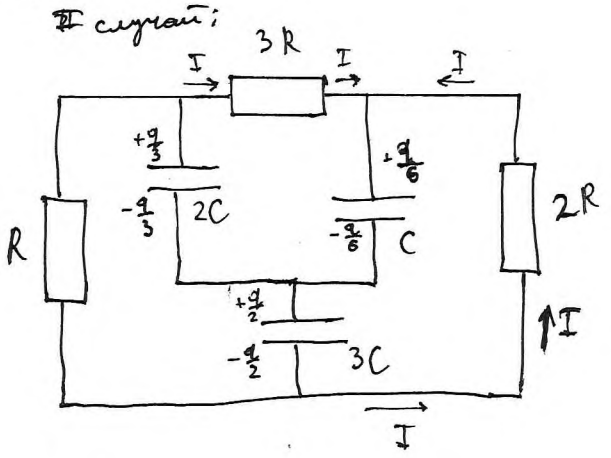
$\Delta W = W_0 - W_1 = \frac{1}{4}\frac{q^2}{C} - \frac{1}{12}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{6}\frac{q^2}{C}$ – энергия, выделившаяся на ~~конденсаторах~~ всех резисторах суммарно.

$\Delta W = Q_{R_1} + Q_{R_2} + Q_{R_3}$

I случай



II случай:



Рассмотрим 2 случая как могли перетечь заряды между конденсаторе