326

374369
Регистрационный номер

Фамилия Бондарева
Имя Нина
Отчество Павловна

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 326
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	3	3				7	

N 2

$tg\,a(x-tg\,a)^2+ctg\,a\,(x-ctg\,a)^2=0$ имеет единственное решение

$tg\,a=\frac{1}{ctg\,a} \Rightarrow ctg\,a=\frac{1}{tg\,a} \Rightarrow tg\,a\neq 0,\ ctg\,a\neq 0$

$tg\,a(x-tg\,a)^2+\frac{1}{tg\,a}\left(x-\frac{1}{tg\,a}\right)^2=0$

Замена $b=tg\,a,\ b\neq 0$

$b(x-b)^2+\frac{1}{b}\left(x-\frac{1}{b}\right)^2=0$

$b(x^2-2xb+b^2)+\frac{1}{b}\left(\frac{xb-1}{b}\right)^2=0$

$b(x^2-2xb+b^2)+\frac{1}{b^3}((xb)^2-2xb+1)=0 \quad |\cdot b^3\ (b\neq 0)$

$b^4(x^2-2xb+b^2)+x^2b^2-2xb+1=0$

$b^4x^2-2xb^5+b^6+x^2b^2-2xb+1=0$

$x^2(b^4+b^2)-2x(b^5+b)+b^6+1=0$

$D=4(b^5+b)^2-4(b^4+b^2)(b^6+1)$

если ур-е имеет единственное решение

$\Rightarrow D=0 \Rightarrow 4(b^5+b)^2-4(b^4+b^2)(b^6+1)=0$

$$4(b^5+b)^2 = 4(b^4+b^2)(b^6+1)$$

$$b^2(b^4+1)^2 = b^2(b^2+1)(b^6+1) \quad | : b^2 \neq 0$$

$$(b^8+2b^4+1) = b^8+b^2+b^6+1$$

$$2b^4 - b^2 - b^6 = 0$$

$$b^2(2b^2-1-b^4) = 0 \quad | : b^2 \neq 0$$

$$b^4 - 2b^2 + 1 = 0$$

$$(b^2-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=0 \\ b+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

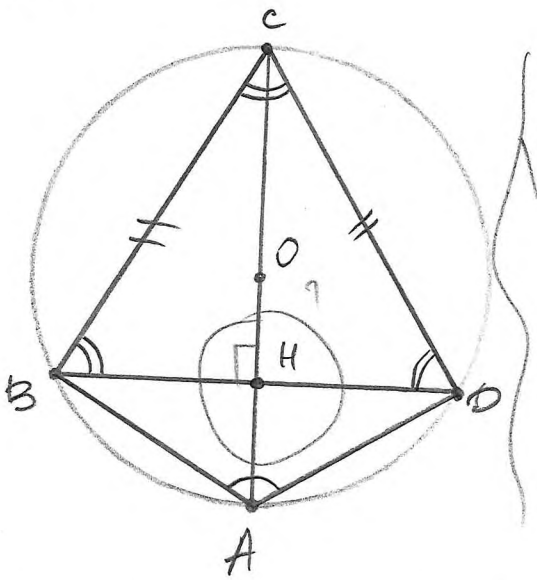
$\Rightarrow$ Обратная замена:

$b=1 \Rightarrow tg\ a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$b=-1 \Rightarrow tg\ a = -1 \Rightarrow a = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $a \in \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k\right\},\ k \in \mathbb{Z}$ 3

N3



Общ. случай

Дано: $\triangle BCD$ - равнобедренный

$CB = CD$; $A \in \cup BD$; $\angle BAD = 120°$

$AC = 4$; $\omega(O; R)$ - описана около $\triangle BCD$

Найти: S_{ABCD} - ?

Решение:

1) $\angle BAD$ - вписанный в ω и опирается на дугу $\cup DB$ ($C \in \cup DB$)

$\Rightarrow$ т.к $\angle BAD = 120° \Rightarrow \cup DB = 120° \cdot 2 = 240°$ это происходит при любом расположении точки A на дуге $\cup BD$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle(BD; AC)$

AC, BD - диагонали ABCD

$\Rightarrow$ площадь зависит от длины AC, BD и угла между ними

ШИФР: 326
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"
Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания:
НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№3 (продолжение)

поэтому рассмотрим случай, когда AC - диаметр ω

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

3) Рассм. ABCD - вписан в ω, т.к $A, B, C, D \in \omega$

$\Rightarrow$ по т. о четырехугольнике вписанном в ок-ть $\Rightarrow$

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

4) Рассм. $\triangle BCD$ - р/б

$BC = CD$, $\angle CBD = \angle CDB = (180^\circ - \angle BCD) : 2$

$\Rightarrow \angle CBD = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \angle CDB = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCD$ - равносторонний $\Rightarrow BC = CD = BD = a$

т.к ω описана около р/с $\triangle BCD \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = BC = CD = BD$

5) Рассм. ABCD

$AC = 4$ - диагональ

$BD = 2\sqrt{3}$ - диагональ

(ИЛИ) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot \sin\angle(AC; BD)$

3

6) Рассм. $\triangle BCD$ - р/с

O - центр ок-ти ω $\Rightarrow$ O - точка пересечения медиан, биссектрис и высот $\triangle BCD$

$\Rightarrow CA \cap BD = H \Rightarrow CH$ - высота $\triangle BCD$

$\Rightarrow \angle CHB = 90^\circ \Rightarrow \angle (CA; BD) = 90^\circ$

7) $\left[S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle (AC; BD) = \right.$

$\left. = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 1 = 4\sqrt{3} \right]$

если AC будет хордой (не диаметром) ок-ти ω $\Rightarrow \angle (BD; AC) \neq 90^\circ$ и диаметр будет больше AC

$\Rightarrow$ при изменении положения точки A будет изменяться ~~угол между~~ $\angle (BD; AC)$, а также BD, но площадь S_{ABCD} будет оставаться такой же $S_{ABCD} = 4\sqrt{3}$, т.к $\sin \angle (BD; AC) < 1$

$R > 2 \Rightarrow BD > 2\sqrt{3}$

Ответ: $S_{ABCD} = 4\sqrt{3}$

N 1

2301 г $\rightarrow$ 2400 г

$n : 100 = m$

~~XXX~~ остаток от деления n на $100 = k$ $\Bigg\} \Rightarrow n : (m+k) \Rightarrow n$ - счастливый

2400 : 100 = 24

остаток 0 $\Bigg\} \Rightarrow 2400 : (24+0) = 100 \Rightarrow$ 2400 „счастливый" год

если $2301 : 100 = 23 + \frac{1}{100} \Rightarrow$ ~~2301 : 100~~ $2301 : (23+1)$ - ложь

$2302 : 100 = 23 + \frac{2}{100} \Rightarrow 2302 : (23+2)$ - ложь

$2322 : 100 = 23 + \frac{22}{100} \Rightarrow 2322 : (23+22)$ - ложь

$2322 : 43$, т.е на $(23+22) - 2$

никакие ~~числа~~ года кроме 2400 больше не являются счастливыми"

Ответ: 1

(1)

374369
Регистрационный номер

Фамилия Бондарева
Имя Нина
Отчество Павловна

715
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

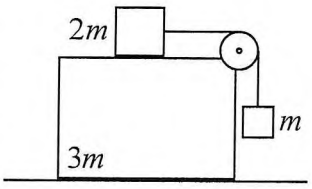
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0{,}18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0{,}21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0{,}14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 715
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯЧ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

N 1

$V = 20$ л
$V_0 = 0{,}5$ л
$t = 20°C$
$p_m = 1 \cdot 10^6$ Па
$\rho_A = 800$ кг/м^3
$M = 28$ г/моль $= 0{,}028$ кг/моль
$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot град}$

азот распределился в сосуде

$\Rightarrow P_1 V = \nu_A R T \Rightarrow$ после нагревания азота: $PV = \nu_A R t$

$\left.\begin{array}{l} \nu_A = \frac{m_A}{M} \\ m_A = V_0 \cdot \rho_A \end{array}\right\} \Rightarrow \nu_A = \frac{V_0 \cdot \rho_A}{M}$

$\Rightarrow PV = \frac{V_0 \rho_A}{M} R t$

азот испарился $\Rightarrow m_A$ - сохранилась $\Rightarrow \nu_A$ не изменилось

$\Rightarrow$ после испарения и нагревания азота

после нагревания и испарения азота $PV = \frac{V_0 \rho_A}{M} R t$

$$P = \frac{V_0 \cdot \rho_A \cdot R \cdot t}{M \cdot V} = \frac{0{,}5 \cdot 800 \cdot 8{,}31 \cdot 20}{0{,}028 \cdot 20} = \frac{5 \cdot 80 \cdot 831}{10 \cdot 100 \cdot \frac{28}{1000} \cdot 2} = \frac{5 \cdot 40 \cdot 831}{28 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \cdot 800 \cdot 831}{10 \cdot 100 \cdot \frac{28}{1000}} = \frac{5 \cdot 8^2 \cdot 831 \cdot 100}{28_7} = \frac{831 \cdot 10^3}{7} = \frac{831}{7} \cdot 10^3 \approx 119 \cdot 10^3$$

$\Rightarrow P < P_m$ ($119 \cdot 10^3 < 10^6$)

$\Rightarrow$ сосуд не разорвёт

2

при $P_m V = \frac{V_0 \rho}{\mu} R t_0$ сосуд

при $T > t_0$ сосуд разорвет

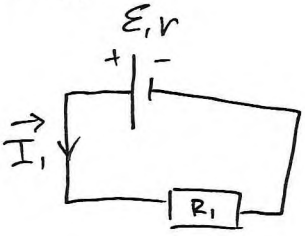
$$t_0 = \frac{P_m V \cdot \mu}{V_0 R \rho} = \frac{10^6 \cdot 20 \cdot 0{,}028}{0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 800} = \frac{10^4 \cdot 2 \cdot \frac{28}{1000}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{831}{100} \cdot 8} =$$

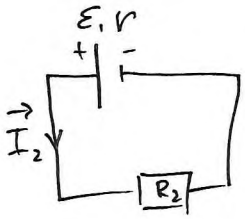
$$= \frac{10^4 \cdot 2 \cdot 28}{5 \cdot 831 \cdot 8} = \frac{10^4 \cdot 14}{831} = \frac{14}{831} \cdot 10^4$$

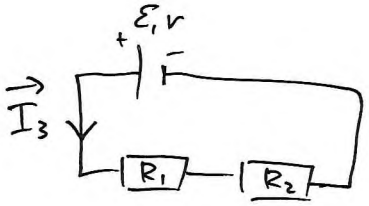
при $T > \frac{14}{831} \cdot 10^4$ сосуд разорвет

Ответ: сосуд не разорвет; при $T > \frac{14}{831} \cdot 10^4$ сосуд разорвёт

N 2







$I_1 = 0{,}18$ A $\quad I_2 = 0{,}21$ A $\quad I_3 = 0{,}14$ A $\quad I - ?$

① $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1} \Rightarrow r + R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I_1}$

② $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2} \Rightarrow \mathcal{E} = I_2 (r + R_2)$

$\Rightarrow (r + R_1) I_1 = \mathcal{E} = I_2 (r + R_2)$

$r I_1 + R_1 I_1 = I_2 r + I_2 R_2$

$r = \frac{I_2 R_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2}$

③ $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2} \Rightarrow \mathcal{E} = I_3 \left(\frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} + R_1 + R_2 \right)$

$$I_2 \left(\frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} + R_2 \right) = I_3 \left(\frac{I_2 R_2 - I_1 R_1 + R_1 I_1 - R_1 I_2 + R_2 I_1 - R_2 I_2}{I_1 - I_2} \right)$$

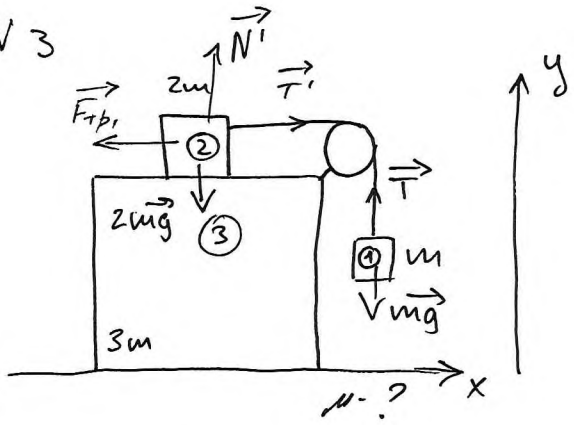
$$I_2 (I_2 R_2 - I_1 R_1 + R_2 I_1 - R_2 I_2) = I_3 (R_2 I_1 - R_1 I_2)$$

$$I_2 (R_2 I_1 - I_1 R_1) = I_3 (R_2 I_1 - R_1 I_2)$$

$$R_2 I_1 I_2 - R_1 I_2 I_1 = R_2 I_1 I_3 - R_1 I_2 I_3$$

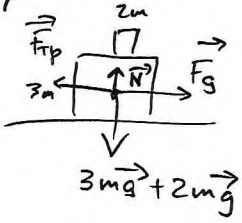
$$R_2 (I_1 I_2 - I_1 I_3) = R_1 (I_2 I_1 - I_2 I_3) \Rightarrow R_2 = \frac{R_1 I_2 (I_1 - I_3)}{I_1 (I_2 - I_3)}$$

N 3



если большое тело стоит, действует сила реакции опоры N, тяжести, трения и давления ② тела

=>



$5m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_g + \vec{N} = 0$

Рассм. ① тело: $\vec{T} + m\vec{g} = 0$

y: $T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$

Рассм ② тело: $\vec{T}' + 2m\vec{g} + \vec{N}' + \vec{F}_{тр1} = 2m\vec{a}$

y: $2mg - N' = 0$

$2mg = N'$

$F_{тр}' = \mu_1 \cdot N' = \mu_1 \cdot 2mg$

$|\vec{T}'| = |\vec{T}| = mg$

x: $2ma = T' - F_{тр1}$

$2ma = T' - \mu_1 \cdot 2mg = F_g$ - сила воздействия ② тела на ③ тело

Рассм ③ тело: $5m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_g + \vec{N} = 0$

y: $-5mg + N = 0$

$N = 5mg$

$F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot 5mg$

x: $F_g - F_{тр} = 0$

$F_g = F_{тр}$

$F_g = 2ma = T' - F_{тр1} = T' - \mu_1 \cdot 2mg =$

$= mg - \mu_1 \cdot 2mg$

$mg - \mu_1 \cdot 2mg = \mu \cdot 5mg$

если трения между телами ② и ③ нет, то

$mg = \mu \cdot 5mg \Rightarrow \mu = \frac{1}{5}$

3) тело будет неподвижным при $\mu \geq \frac{1}{5}$

Ответ: при $\mu \geq \frac{1}{5}$

13

ШИФР: 715
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"
Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

N 2 (продолжение)

$$\mathcal{E} = I_1\left(\frac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2} + R_1\right) = I_1\left(\frac{\frac{R_1I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1R_1}{I_1-I_2} + R_1\right) =$$

$$= I_1R_1\left(\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2} + 1\right)$$

$$r = \frac{I_2\frac{R_1\cdot I_2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - R_1I_1}{I_1-I_2} = R_1\cdot\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2}$$

$$\left[I = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{I_1\cancel{R_1}\left(\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2} + 1\right)}{\cancel{R_1}\cdot\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2}} =\right.$$

$$\left.= \frac{I_1\left(\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2} + 1\right)}{\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}{I_1-I_2}} = \frac{I_1(I_1-I_2)\left(\frac{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_2}{I_1-I_2}\right)}{\frac{I_2^2(I_1-I_3)}{I_1(I_2-I_3)} - I_1}\right]$$

ШИФР: 715
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания:
НИЯУ МИФИ, г. Москва
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№ 2

$$I = \frac{I_1 (I_1 - I_2)\left(\dfrac{I_2^2 (I_1 - I_3)}{I_1 (I_2 - I_3)} - I_2 \Big/ \dfrac{I_1 - I_2}{I_1 - I_2}\right)}{\dfrac{I_2^2 (I_1 - I_3)}{I_1 (I_2 - I_3)} - I_1} =$$

$$= \frac{0{,}18 (-0{,}03)\left(\dfrac{0{,}21^2 (0{,}04)}{0{,}18 (0{,}07)} - 0{,}21 \Big/ \dfrac{(-0{,}03)}{(-0{,}03)}\right)}{\dfrac{0{,}21^2 (0{,}04)}{0{,}18 (0{,}07)} - 0{,}18} = \frac{0{,}18 \left(\dfrac{0{,}21^2 \cdot 0{,}04}{0{,}18 \cdot 0{,}07} - 0{,}21\right)}{\dfrac{0{,}21^2 \cdot 0{,}04}{0{,}18 \cdot 0{,}07} - 0{,}18} =$$

$$= \frac{0{,}18 (0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}21 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}07)(0{,}18 \cdot 0{,}07)}{(0{,}18 \cdot 0{,}07)(0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}18^2 \cdot 0{,}07)} =$$

$$= \frac{0{,}18 (0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}18^2 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}07)}{0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}18^2 \cdot 0{,}07}$$

Ответ: $I = \dfrac{0{,}18 (0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}18^2 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}07)}{0{,}21^2 \cdot 0{,}04 - 0{,}18^2 \cdot 0{,}07}$

38