363888
Регистрационный номер

Фамилия Акопян
Имя Арсений
Отчество Кириллович

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Конкурс

Работа по математике

Дата 06.04.24
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

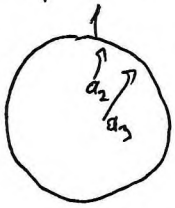
1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
10	0					1	

№1

$a_n^2 = a_{n+1} + a_{n+2}$, где n – порядковый номер числа.

Т.к. по условию все числа положительны, то $a_i \in (0; +\infty)$

Рассмотрим 1 вариант, когда какое-то $0 < a_i \leq 2$



1. Если $a_1 = 1$, тогда → почему именно 1?

$a_1^2 = a_2 + a_3$

$1 = a_2 + a_3$ → обоснование?

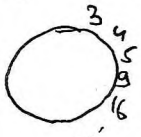
$a_2, a_3 > 0$; Также $a_2, a_3 < 1$ (иначе равенство не выполняется)

Если $a_2 < a_3$, тогда такой расклад не возможен, т.к. $a_2^2 < a_3 \Rightarrow a_2^2 \neq a_3 + a_4$ ($т.к.\ a_i > 0$). Допустим $a_2 = 0{,}9$; $a_3 = 0{,}1$, тогда $a_2^2 = a_3 + a_4$: $0{,}81 = 0{,}1 + a_4 \Rightarrow a_4 = 0{,}71$. Такая ситуация невозможна, т.к. $a_i > a_{i+1}$.

∴ Получается, $a_i \neq [0; 2)$

Рассмотрим случай, когда $a_i \in (2; +\infty)$

Если $a = 3$, то ряд



выполняется до тех пор, пока не доходит до a_{2023}.

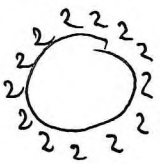
$a_{i+1} > a_i \Rightarrow a_{2023}$ – очень большое число по сравнению с a_1. Если $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, то $a_{2023}^2 \neq 9 + 16$

Данный случай. Пример работает с любым $a \in (2; +\infty)$, поэтому что $a_1 + a_2 < a_{2023}$, т.к. $a_{i+1} > a_i$.

→ почему именно 3?

3. Рассмотрим $a_i = 2$.

Если $a_1 = 2$, то $a_2 = a_3 = 2$.



$a_1^2 = a_2 + a_3$

$4 = 2 + 2$ ✓

Т.к. $a_i = a_{i+1} = a_{i+2} \dots$, то $a_{2023} = 2$

$\Rightarrow a_{2023}^2 = a_1 + a_2$

$4 = 4$ ✓

Т.к. числа все обязаны быть уникальными, то все числа в ряду равны 2

Тогда их сумма $= 2 \cdot 2023 = \underline{4046}$

Ответ: 4046

Недостаточное обоснование 1

№2

$\lg(10^y \cdot 2^x) = \lg(10^y) + \lg(2^x) = y + \frac{x}{\lg 10 \cdot \log_2 10} =$

$\begin{cases} 2^x \geq 0 \\ 10^y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x, y \in R$

$= y + \frac{x}{1 + \log_2(5)}$

Пусть $y + \frac{x}{1+\log_2 5} = a$

Рассмотрим $10^{3y} \cdot 2^x$: 10^{3y} – целое число, при $y \geq 0$

2^x – –//– , при $x \geq 0$

Если $x < 0$, то $[2^x] = 0$; если $y < 0$, то $[10^{3y}] = 0$

Также при $x, y < 0$ $[10^{3y} \cdot 2^x] = 0$, т.к. $10^{3y} < 1$, $2^x < 1$ $\Rightarrow$ их перемножения меньше 1. $\Rightarrow$ x, y – разных знаков

Пусть $x \geq 0$: $\lg[10^{3y} \cdot 2^x] = \lg 3y + \frac{x}{1+\log_2 5}$

Пусть $3y + \frac{x}{1+\log_2 5} = b$

$\Rightarrow [a] - [b] = -2y$ ✓, т.к. y, $3y$ – целые числа (по ус.), дробная часть $\frac{x}{1+\log_2 5}$ отбрасывается, целая остаётся и сокращается.

$\Rightarrow 3x + 5 = -2y$

$y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y$.

$\lim_{x \to +\infty} (3x+5) = +\infty$

$\lim_{y \to +\infty} [\lg(10^y \cdot 2^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 2^x]] = -\infty$

$\Rightarrow$ решение возможно при $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$

Как целая часть может быть числом меньше 0?

0

целое?!

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 1
Площадка написания: НИЯУ МИФ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Пусть $x<0$:

$\Rightarrow \lg[\frac{1}{3}(10^{3y}\cdot 2^{x})] = 3y + \frac{x}{1+\log_2 5}$

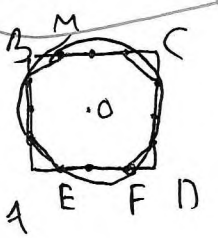
$\Rightarrow [6] - [5] = -2y$.

$3x+5 = -2y$ невозможно, т.к. x и y должны быть разных знаков $\Rightarrow$ решение $(0; -\frac{5}{2})$

Ответ: $(0; -\frac{5}{2})$

№3

Т.к. вокруг восьмиугольника можно описать окружность, этот восьмиугольник правильный. $\Rightarrow$ ABCD - тоже правильный четырехугольник, т.е. квадрат.



O - центр окр.

$OF = OE = \sqrt{5}$ (радиус)

$OM = \sqrt{5}$

Р-м $\triangle ABE$:

$\Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = a^2 + (1+\frac{a}{2})^2$

$5a^2 + 4a - 76 = 0$

$D = 16 + 20\cdot 76 = 1536 = 4^4 \cdot 6$

$a = \frac{-4 \pm 16\sqrt{6}}{2\cdot 5} = \frac{-2 \pm 8\sqrt{6}}{5}$

$a = \begin{cases} \frac{-2-8\sqrt{6}}{5} \text{ н.к. } (a>0) \\ \frac{-2+8\sqrt{6}}{5} \end{cases}$ (V)

$\Rightarrow S_{ABCD} = a^2 = \left(\frac{-2+8\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$

Ответ: $\frac{256}{25}$

Лист 2 из 2

не обязательно!

не обосновано!

Обоснования нет. Ответ неверный!