305

363721
Регистрационный номер

Фамилия Бабкин
Имя Даниил
Отчество Игоревич

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 109 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 305

(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

«Юниор»

Работа по математике

Дата 06.04.24

Вариант № 4

Площадка написания: НИЯУ МИФИ, г. Москва

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА

(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
2	3	2				7	

№2

$\operatorname{tg}\alpha(x-\operatorname{tg}\alpha)^2+\operatorname{ctg}\alpha(x-\operatorname{ctg}\alpha)^2=0$ → 1 реш

• Замена: $t=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow t(x-t)^2+\frac{1}{t}(x-\frac{1}{t})^2=0$ → 1 р.

$\begin{cases} t^2(x-t)^2+(x-\frac{1}{t})^2=0 \\ t\neq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} t^2(x^2-2xt+t^2)+x^2-\frac{2x}{t}+\frac{1}{t^2}=0 \\ t\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2t^2-2xt^3+t^4+x^2-\frac{2x}{t}+\frac{1}{t^2}=0 \quad |\cdot t^2\neq 0 \\ t\neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2t^4-2xt^5+t^6+x^2t^2-2xt+1=0 \quad (*) \\ t\neq 0 \quad (\#) \end{cases}$

$(*)$: $(t^4+t^2)x^2-2(t^5+t)x+t^6+1=0$

1) $t^4+t^2=0$: $t^2(t^2+1)=0 \Rightarrow t=0$ – не подходит (см. $(\#)$)

2) $\mathcal{D}=0$: $4(t^5+t)^2-4(t^4+t^2)(t^6+1)=0 \quad |:4$

$t^{10}+2t^6+t^2-(t^{10}+t^4+t^6+t^2)=0$; $t^{10}+2t^6+t^2-t^{10}-t^4-t^6-t^2=0$;

$t^6-2t^4+t^2=0 \quad |:t^2\neq 0$; $t^4-2t^2+1=0$; $(t^2-1)=0$; $t=\pm 1$

• $t=-1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1 \Rightarrow \boxed{\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

• $t=1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=1 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

Ответ: ~~$\{\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$~~ $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi p}{2}\}$, $p\in\mathbb{Z}$. 3

№1 1)

Пусть z – остаток от деления n на 100;

$\Rightarrow \begin{cases} n:(z+\frac{n-z}{100}) \\ n\equiv z \pmod{100} \end{cases}$; $\begin{cases} n:(z+\frac{n-z}{100}) \\ z=100k+n,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow n:(100k+n+\frac{n-100k-n}{100})$; $n:(99k+n)$ $\Rightarrow n:99k$ $\Rightarrow$ каждый 99-й год

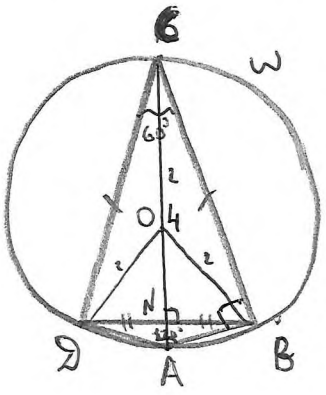
Лист 1 из 1

) 2400 − 2301 = 99 ; ⇒ Петя насчитает 1 „счастливый" год.

Ответ: 1 „счастливый" год.

2

13



а) Пусть $AC \cap BД = N$

1) ω опис. около $\triangle CBД$ ⇒ $\angle ДAB + \angle ДCB = 180°$ (по св-ву опис. окр-ти);

⇒ $\angle ДCB = 60°$

2) AC – диаметр ω (по опр.)

$\angle CBA$ и $\angle CДB$ – впис., $\overset{\frown}{AC}$ ⇒ $\angle CBA = \angle CДB = 90°$ (по св-ву впис. углов)

3) $\angle ДCB$ – впис. в ω

$\angle ДCB$ опир. на $\smile ДA$

$\angle ДCB = 60°$ ⇒ $\smile ДAB = 120°$ (по св-ву впис. угла)

Часть случаев!

4) Д.п.: радиусы ω OД; OB (т. $O \in AC$, т.к. AC – диаметр (п.2));

⇒ $OД = OB = \frac{AC}{2} = 2$

5) $\angle ДOB$ – центральный

$\angle ДOB$ опир. на $\smile ДAB$

$\smile ДAB = 120°$ (п.3) ⇒ $\angle ДOB = 120°$ (по св-ву центр. угла)

6) $\triangle ДOB$: $BД^2 = OД^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot OД \cdot \cos\angle ДOB$ (т. косинусов);

⇒ $BД^2 = 4 + 4 - 8 \cdot \cos 120° = 8 + 4 = 12$ ⇒ $BД = 2\sqrt{3}$

~~7) $S_{ABCД} = AC \cdot BД \cdot \sin\angle$~~

~~$S_{ABCД}$~~ 7) $\triangle ДOC$ и $\triangle BOC$: $CД = BC$ (по усл.); $OД = OB$ (п.4); OC – общая ⇒ $\triangle ДOC = \triangle BOC$ по 3-м сторонам;

⇒ $\angle COД = \angle COB$ (С.Э.Р.Т.) ⇒ $\angle ДOA = \angle BOA$ (как смежные)

8) $\triangle ДON$ и $\triangle BON$: $OД = OB$ (п.4); $\angle COД = \angle COB$ (п.7); ON – общая ⇒ $\triangle ДON = \triangle BON$ по 2-м сторонам и углу между ними;

⇒ $ДN = BN$ (С.Э.Р.Т.)

9) AC – диаметр ω (по опр.)

$BД$ – дуга ω (по опр.)

$ДN = BN$ (п.8) ⇒ $AC \perp BД$ (по св-ву диаметра);

⇒ $(\hat{AC}; \hat{BД}) = 90°$

10) $S_{ABCД} = \frac{AC \cdot BД \cdot \sin(\hat{AC}; \hat{BД})}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Ответ: $S_{ABCД} = 4\sqrt{3}$.

2