339205
Регистрационный номер

Фамилия Пальцина
Имя Дарья
Отчество Денисовна

301
(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 109 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg}a\cdot(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\cdot(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$ имеет единственное решение.
3. Окружность описана около равнобедренного треугольника $BCD\,(CB=CD)$. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\angle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 301
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 4
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
0	3	2				5	

№2

$$\operatorname{tg}a\,(x-\operatorname{tg}a)^2+\operatorname{ctg}a\,(x-\operatorname{ctg}a)^2=0$$
$$\operatorname{tg}a\,(x-\operatorname{tg}a)^2+\frac{1}{\operatorname{tg}a}\left(x-\frac{1}{\operatorname{tg}a}\right)^2=0$$
$$\operatorname{tg}a\,(x^2-2\operatorname{tg}a\cdot x+\operatorname{tg}^2a)+\frac{1}{\operatorname{tg}a}\left(x^2-\frac{2x}{\operatorname{tg}a}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}\right)=0$$
$$x^2\cdot\operatorname{tg}a-2\operatorname{tg}^2a\cdot x+\operatorname{tg}^3a+\frac{x^2}{\operatorname{tg}a}-\frac{2x}{\operatorname{tg}^2a}+\frac{1}{\operatorname{tg}^3a}=0$$
$$x^2\left(\operatorname{tg}a+\frac{1}{\operatorname{tg}a}\right)-2x\left(\operatorname{tg}^2a+\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}\right)+\operatorname{tg}^3a+\frac{1}{\operatorname{tg}^3a}=0$$

$$D=4\left(\operatorname{tg}^2a+\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}\right)^2-4\left(\operatorname{tg}a+\frac{1}{\operatorname{tg}a}\right)\left(\operatorname{tg}^3a+\frac{1}{\operatorname{tg}^3a}\right)=4\left(\operatorname{tg}^4a+\frac{2\operatorname{tg}^2a}{\operatorname{tg}^2a}+\frac{1}{\operatorname{tg}^4a}\right)-4\left(\operatorname{tg}^4a+\frac{\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}^3a}+\frac{\operatorname{tg}^3a}{\operatorname{tg}a}+\frac{1}{\operatorname{tg}^4a}\right)$$
$$=4\operatorname{tg}^4a+8+\frac{4}{\operatorname{tg}^4a}-4\operatorname{tg}^4a-\frac{4}{\operatorname{tg}^2a}-4\operatorname{tg}^2a-\frac{4}{\operatorname{tg}^4a}=8-4\operatorname{tg}^2a-\frac{4}{\operatorname{tg}^2a}$$

для того, чтобы корень был один $D=0$

$$8-4\operatorname{tg}^2a-\frac{4}{\operatorname{tg}^2a}=0$$
$$\operatorname{tg}^2a+\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}-2=0\ /\cdot\operatorname{tg}^2a\neq0$$
$$\operatorname{tg}^4a-2\operatorname{tg}^2a+1=0$$
$$(\operatorname{tg}^2a-1)=0$$
$$\operatorname{tg}^2a=1\Rightarrow\operatorname{tg}a=\pm1$$

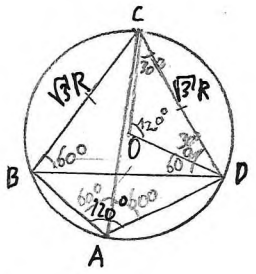
1 случай
$\operatorname{tg}a=1\Rightarrow a=\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z$

2 случай
$\operatorname{tg}a=-1\Rightarrow a=-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in Z$

Ответ: $a=\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z$
$a=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z$

3

3



$\angle BAD = 120^\circ$

$AC = 4$

$\triangle BCD$ - р/б ($BC = CD$)

$S_{ABCD} = ?$

Пусть O - центр окружности

четырёхугольник $ABCD$ - вписанный в окружность $\Rightarrow$ по свойству вписанного четырёхугольника $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BCD = 60^\circ$

$\triangle BCD$ - р/б $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = 60^\circ$

$\angle BCD = \angle CBD = \angle CDB = 60^\circ \Rightarrow \triangle BCD$ - р/с

O - центр окружности, а так как $\triangle BCD$ - р/с, то O - находится в центре треугольника, а также точка O является пересечением медиан, высот и биссектрис этого треугольника

$\Rightarrow \angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$; т.к. CO и OD - бис.

$CO = OD = R$

по т. cos $\triangle COD$

$CD^2 = 2R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120^\circ$

$CD^2 = 2R^2 - 2R^2 (\cos 180^\circ - 60^\circ)$

$CD^2 = 2R^2 + 2R^2 \cdot \frac{1}{2}$

$CD^2 = 3R^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}R = BC = BD$

$60^\circ = \angle CAD = \angle CBD$ - вписанные, опираются на одну дугу CD

$60^\circ = \angle CDB = \angle BAC$ - вписанные, опираются на одну дугу BC

по т. cos $\triangle CAD$

$3R^2 = 16 + AD^2 - 2 \cdot 4 \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$

$3R^2 = 16 + AD^2 - 4AD$

$AD^2 - 4AD + 16 - 3R^2 = 0$

$\mathcal{D} = 16 - 4(16 - 3R^2) = 16 - 64 + 12R^2 = 48 + 12R^2 = 4(4 + R^2)$

$AD_{(1)} = \frac{4 + 2\sqrt{4 + R^2}}{2} = 2 + \sqrt{4 + R^2}$

$AD_{(2)} = \frac{4 - 2\sqrt{4 + R^2}}{2} = 2 - \sqrt{4 + R^2} < 0 \Rightarrow$ не под.

по т. cos $\triangle BAC$

$3R^2 = 16 + AB^2 - 2 \cdot 4 \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$

$3R^2 = 16 + AB^2 - 4AB$

$AB^2 - 4AB + 16 - 3R^2 = 0$

$\mathcal{D} = 16 - 4(16 - 3R^2) = 16 - 64 + 12R^2 = 48 + 12R^2 = 4(4 + R^2)$

$AB_{(1)} = \frac{4 + 2\sqrt{4 + R^2}}{2} = 2 + \sqrt{4 + R^2}$

$AB_{(2)} = \frac{4 - 2\sqrt{4 + R^2}}{2} = 2 - \sqrt{4 + R^2} < 0 \Rightarrow$ не под.

$AD = AB = 2 + \sqrt{4 + R^2} \Rightarrow \triangle BAD$ - р/б

$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle BAD}{2} = 30^\circ$

$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 90^\circ$

(2)

по т. синусов $\triangle ACD$

$2R = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$

$2R = \frac{4}{1}$

$2R = 4$

$R = 2$

$S_{ABCD} = 2 S_{\triangle ADC} = [redacted] = 2 \cdot \frac{CD \cdot AD}{2} = CD \cdot AD = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{8})$

$O.O. : S_{ABCD} = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{8})$