№ 313285
Регистрационный номер

Фамилия Гарднин
Имя Семён
Отчество Владимирович

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 3

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Ю Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024
Вариант № 3
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
0	0	1				1	

№1

Пусть эти числа являются членами последовательности $\{a_n\}$, где n - номер ~~элемента~~ ~~числа~~ ~~по кругу~~ числа в кругу. Тогда получаем следующие равенства:

$a_1^2 = a_2 + a_3$

$a_2^2 = a_3 + a_4$

$a_3^2 = a_4 + a_5$

...

$a_{50}^2 = a_1 + a_2$

Перемножим ~~на~~ равенства

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{50} = \sqrt{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{49}+a_{50})} =$

$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50})^2 =$

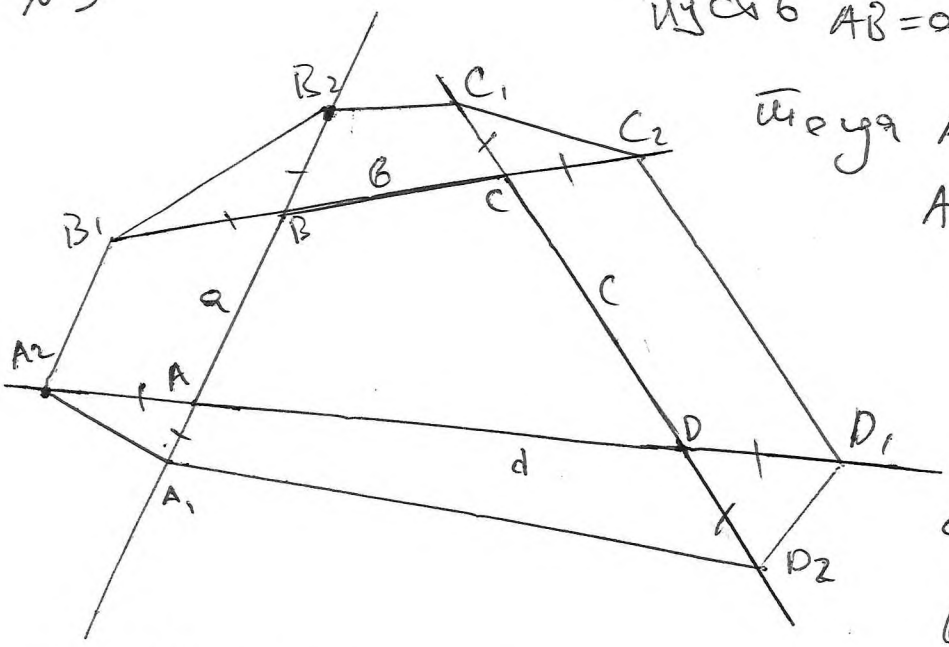
$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_{50} = 2$

Ответ: № 2

0

№3



Пусть $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $AD=d$

Тогда $A_2D_1=b+d$

$A_1B_2=b+a$

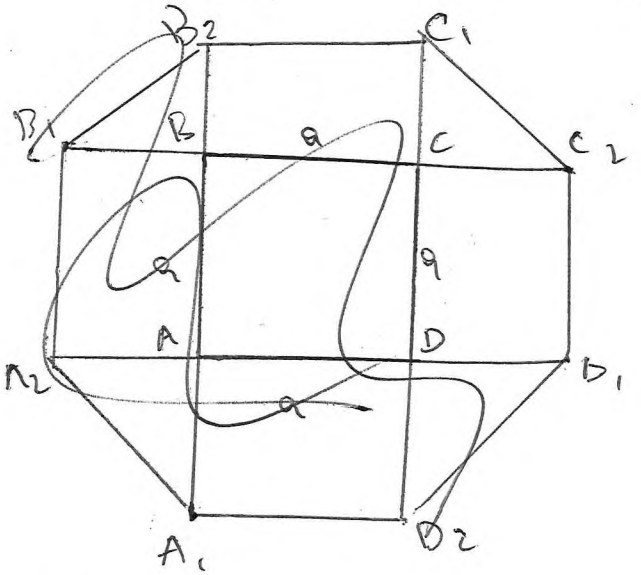
$B_1C_2=b+b$

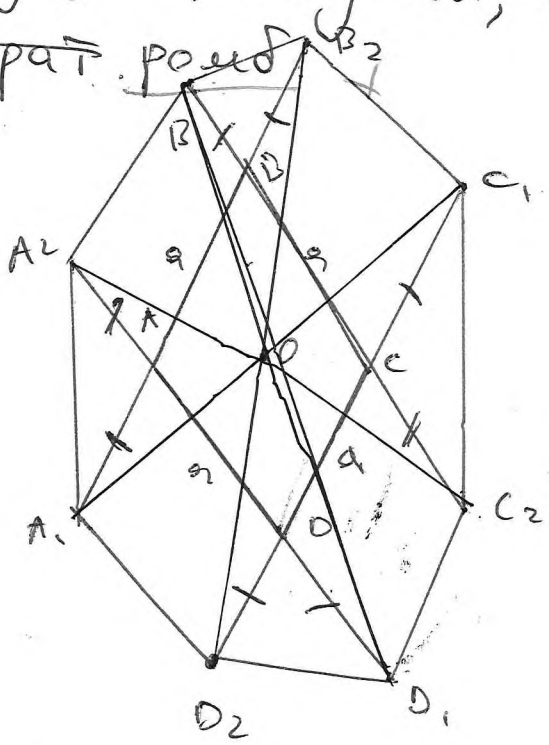
$C_1D_2=b+c$

$AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=3$

ω - окр., опис. около восьмиугольника,

тогда A_1B_2; C_1D_2; C_2B_1; A_2D_1 – хорды. По теореме о хордах $A_2A\cdot AD_1=A_1A\cdot AB_2 \Rightarrow 3\cdot(d+3)=3\cdot(a+3) \Rightarrow$ $a=d$. Аналогично рассуждая, получаем, что $a=b=c=d \Rightarrow ABCD$ - ~~квадрат~~ ромб





Пусть O - центр ω.

Заметим, что ~~A_1OC_1~~ т. A_1, O, C_1 ~~не~~ лежат на диаметре окр. Зная, что её радиус $\sqrt{29}$ (1) узнаём, что $A_1C_1=2\sqrt{29}$. Таким → Аналогично, $B_2D_2=2\sqrt{29}$

Заметим, что $A_2D_1 \parallel B_1C_2 \parallel B_2C_1 \parallel A_1D_1$

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по математике

Дата 06.04.2024

Вариант № 3

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

По пр. пар. A_1ADD_2 и BB_2C_1C – пар., причём их площади равны.

$$S_{A_1B_2C_1D_2} = \frac{1}{2}\cdot D_2B_2\cdot A_1C_1\cdot \sin\angle B_2OC_1 =$$

$= 135^\circ$, т.к. ~~угол~~ ~~в пр.~~

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 29\cdot \sin\angle B_2OC_1 = A_1D_2\cdot D_2C_1\cdot \sin\angle A_1D_2C_1 =$$

$= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

$$= a\cdot(a+6)\cdot \sin\angle A_1D_2C_1) = 2\cdot 29\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 29\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = AD\cdot DC\cdot \sin\angle ADC =$$

$\sin\angle A_1D_2C_1 = \sin\angle ADC = \sin\alpha$, т.к. соотв. при $A_1D_2 \parallel AD$ и сек. DD_2

$$= a^2\cdot \sin\alpha$$

$$29\sqrt{2} = a^2\sin\alpha + 6a\sin\alpha = a^2\sin\alpha + 6\cdot a\cdot \frac{2\sqrt{29}}{a} =$$

$$= a^2\sin\alpha + 12\sqrt{29} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \boxed{29\sqrt{2} - 12\sqrt{29}}$$

2

№2

$\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$

~~отсюда $y \geq 0$ иначе lg не опр.~~

$$3x-1 = [\lg(10^{-y} \cdot 4^x)] - [\lg[10^{3y} \cdot 4^x]]$$

$$3x-1 = [2x\lg 2 - y] - [\lg[10^{3y} \cdot 4^x]]$$ Из ограничений следует, что:

$$\frac{1}{10} \leq \lg[10^{3y} \cdot 4^x] \leq 1000$$

$$-1 \leq [10^{2y} \cdot 4^x] \leq 3$$

$$0 \leq [10^{3y} \cdot 4^x] + 1 \leq 4 \Rightarrow y = 0,\ y \neq 0;\ x \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ответ: ~~$(-1; 0)$~~ $(0; -1)$

~~№4~~

0

313285
Регистрационный номер

Фамилия Гаранин
Имя Семён
Отчество Владимирович

612
(не заполнять)

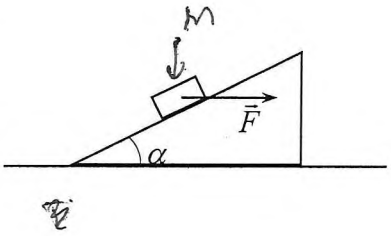
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

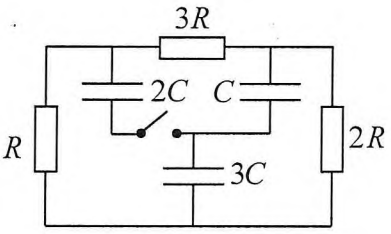
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 612
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
5	5	1				11	

№1

Дано: $V = 20л$; $V_0 = 0,5л$; $t = 20°C$; $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па;
$\rho = 800 \frac{кг}{м^3}$; $\mu = 28 \frac{г}{моль}$; $R = 8,31 \frac{Дж}{моль \cdot гр}$.

Решение: $pV = \nu RT$ $\quad \nu = \frac{m}{\mu}$

Рассмотрим поведение азота в сосуде. Сначала ~~со~~ азот ~~нагр~~ испарится, а потом ~~вода~~ в газообразном состоянии начнёт нагреваться. Запишем закон ~~К~~ Клайперона-Менделеева (~~со~~далее КМ) ~~для~~ в момент, когда азот испарился и занял весь объём сосуда, а его масса при смене агрегатного состояния не изменилась: $p_1 V = \frac{V_0 \rho}{\mu} \cdot R t_к$, где $t_к$ - температура испарения азота. подставим вместо $t_к$; $t = 20°C$ и проверим давление ~~на~~ азота на стенки сосуда

$$p_g \cdot V = \frac{V_0 \cdot \rho}{\mu} \cdot R \cdot t; \quad p_g = \frac{V_0 \cdot \rho \cdot R \cdot t}{V \cdot \mu} =$$

$$= \frac{0{,}5\,л \cdot 800\ кг/м^3 \cdot 8{,}31\ Дж/моль \cdot К \cdot (273+20)\,К}{20\,л \cdot 28\ г/моль} =$$

$$= \frac{800 \cdot 8{,}31 \cdot 293\ \frac{кг}{м^3} \cdot Дж}{40 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot кг} =$$

$$= \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 293\ \frac{Дж}{м^3}}{28} \cdot 10^4 = \frac{8{,}31 \cdot 293}{14} \cdot 10^4\ Па$$

$p_g \overrightarrow{VS} p_м$; $\frac{8{,}31 \cdot 293}{14} \cdot 10^4\ Па \overrightarrow{VS} 10^6\ Па$;

$8{,}31 \cdot 293 \overrightarrow{VS} 1400$; $8{,}31 \cdot 293 > 1400$

$p_g > p_м$ а это значит, что сосуд Дьюара взорвётся! (потому что давление газа в сосуде превысило макс. давление на стенки сосуда). Найдём температуру азота в этот момент. Запишем КМ в момент перед взрывом.

$$p_м V = \frac{V_0 \cdot \rho}{\mu} \cdot R \cdot t_{кр}$$

$$t_{кр} = \frac{p_м V \mu}{V_0 \rho R} = \frac{10^6 Па \cdot 20л \cdot 28 \cdot 10^{-3}\ кг/моль}{0{,}5л \cdot 800\ кг/м^3 \cdot 8{,}31\ Дж/моль \cdot К} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 40 \cdot 28}{800 \cdot 8{,}31} = 10^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{8{,}31} = 10^2 \cdot \frac{14}{8{,}31} = 10^2 \cdot 1{,}68 =$$

$$= 168\,К = -105\,^\circ C$$

Ответ: сосуд Дьюара взорвётся при температуре азота равной $-105\,^\circ C$.

+5

ШИФР: 612
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор

Работа по физике

Дата 06.04.2024

Вариант № _____

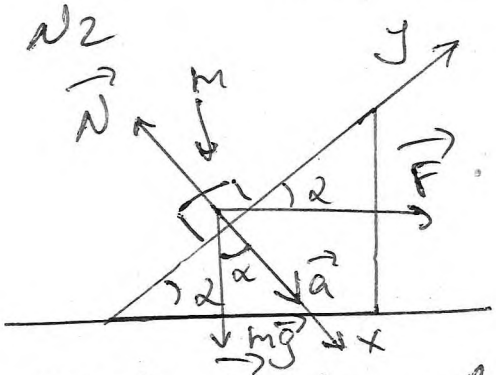
Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№2



$\vec{F} = m\vec{a}$

В Есть 2 напр. вектора $\vec{a}$ перпендикулярно плоскости клина. ~~Дано~~ В ~~дано~~ Из логики задачи следует, что $\vec{a}$ направлен как на рисунке. Обозначим силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ (с. тяжести и реакция опоры соотв.) Запишем II закон Ньютона для бруска:

$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}$; x: $ma = -N + mg\cos\alpha + F\sin\alpha$

y: $0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha$

~~Клин не закреплён $\Rightarrow$ он начинает двигаться.~~

$F\cos\alpha = mg\sin\alpha$; $F = mg\,tg\,\alpha$.

Ответ: $F = mg\,tg\,\alpha$ (+) 5

ШИФР: 612
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада Юниор
Работа по физике

Дата 06.04.2024
Вариант № _____
Площадка написания: НИЯУ МИФИ
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Заряд должен равномерно распределится между конденсаторами. Тогда $q_C = q_{2C} = q_{3C} = \frac{q}{3}$

$U_C = \frac{q}{3C}$, $U_{2C} = \frac{q}{6C}$, $U_{3C} = \frac{q}{9C}$

Стрелками обозначим ~~движение тока~~

~~$U_C = |\varphi_3 - \varphi_4|$, $U_C = |\varphi_4 - \varphi_3|$; $U_{2C} = |\varphi_2 - \varphi_4|$,~~

~~$U_{3C} = |\varphi_1 - \varphi_4|$~~ $U_C = \varphi_4 - \varphi_3$, $U_{2C} = \varphi_4 - \varphi_2$, $U_{3C} = \varphi_4 - \varphi_1$

$U_C = \varphi_4 - \varphi_3$

$U_{2C} = \varphi_2 - \varphi_4$

$U_{3C} = \varphi_1 - \varphi_4$

$Q = \frac{U^2}{R} \cdot t$; ~~$U_R = \varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_1 =$~~

~~$U_R = |\varphi_1 - \varphi_3| = |U_{3C} - U_C| = \frac{2q}{9C}$~~

~~$U_{2R} = |\varphi_2 - \varphi_1| = |U_{2C} - U_{3C}| = \frac{q}{18C}$~~

~~$U_{3R} = |\varphi_2 - \varphi_3| = |U_{2C} + U_C| =$~~

~~$U_R = \varphi_1 - \varphi_3 =$~~ Стрелками обозначим направление движения тока

$U_R = \varphi_1 - \varphi_3 = U_{3C} + U_C = \frac{4q}{9C}$

$$U_{2R} = \varphi_1 - \varphi_2 = U_{2C} - U_{3C} = \frac{q}{18C}$$

$$U_{3R} = \varphi_2 - \varphi_3 = U_{2C} + U_C = \frac{q}{2C}$$

$$Q_R = \frac{16}{81} \cdot \frac{q^2}{C^2} \cdot \frac{1}{R} \cdot t = \frac{16}{81} \cdot \frac{q^3}{C^2 \cdot IR} = \frac{16q^3}{81C^2 \cdot U_R} =$$

$$= \frac{16q^3}{81C^2} \cdot \frac{9C}{4q} = \frac{4q^2}{9C}$$

$$Q_{2R} = \frac{1}{2R} \cdot t \cdot \frac{q^2}{18^2 \cdot C^2} = \frac{q^3}{2 \cdot U_{2R} \cdot 18^2 \cdot C^2} =$$

$$= \frac{q^3}{2 \cdot 18^2 C^2} \cdot \frac{18C}{q} = \frac{q^2}{36C}$$

$$Q_{3R} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3R} \cdot \frac{q^2}{4C^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3Rq} \cdot \frac{q^3}{4C^2} =$$

$$= \frac{1}{3IR} \cdot \frac{q^3}{4C^2} = \frac{1}{3U_{3R}} \cdot \frac{q^3}{4C^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{4C^2} \cdot \frac{2C}{q} =$$

$$= \frac{q^2}{6C}$$

Ответ: $Q_R = \frac{4q^2}{9C}$; $Q_{2R} = \frac{q^2}{36C}$; $Q_{3R} = \frac{q^2}{6C}$.