285403
Регистрационный номер

Фамилия Горбань
Имя Максимилиан
Отчество Владимирович

(не заполнять)

Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант 2

1. По кругу написано 2024 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел.
2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением y.
3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+a/2$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по ~~[illegible]~~ Математике

Дата 06.04.24

Вариант № 2

Площадка написания: Ниу Мифи г. Москва

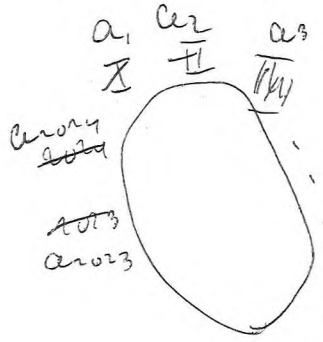
ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
1	1	1				3	

Задача 1

Нарисуем круг и проставим первые 3 и два последних числа.



Запишем условие задачи для них:

$I^2 = II + III$ (рамками цифрами - названы числа)

$a_1^2 = a_2 + a_3$

$a_2^2 = a_3 + a_4$

$a_{2023}^2 = a_{2024} + a_1$

$a_{2024}^2 = a_1 + a_2$

И проделаем это всеми числами, затем сложим левые и правые части, итого:

$$\sum_{i=1}^{2024} (a_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{2024} a_i$$

не обосновано! Если сумма = 0, это не значит, что каждое слагаемое = 0

?

Это равенство можно переписать и в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{2024} (a_i^2 - 2a_i) = 0;$$ предполагая, что все a_i - различны,

нужно решить уравнение: $a_i^2 - 2a_i = 0$

$a_i = 0$ -> не подходит, т.к. по условию числа > 0

$a_i = 2$ - подходит.

Тогда все $a_i = 2$ и сумма квадратов равна $2024 \cdot 2^2 = 8096$

Лист 1 из 2

1

Ответ: 8096.

Задача 2

Решить: $2x-7=[\lg(10^{2y}\cdot 3^x)]-[\lg[10^{-y}\cdot 3^x]]$; $x,y\in\mathbb{Z}$

Найти с max y.

1) $[\lg(10^{2y}\cdot 3^x)]=[2y+x\lg 3]=2y+[x\lg 3]$, $(y\in\mathbb{Z})$

2) $[\lg[10^{-y}\cdot 3^x]]=[-y+x\lg]=-y+[x\lg 3]$

не обосновано!

3) $2x-7=(2y+[x\lg 3]-(-y+[x\lg 3])$

$2x-3y=7$

$\begin{cases} x=8+3t \\ y=3+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{Z}$.

Это должно быть написано раньше!

Важный момент в задаче: для $[\lg[10^{-y}\cdot 3^x]]$, надо что $10^{-y}\cdot 3^x\geq 1$, тогда $[10^{-y}\cdot 3^x]\neq 0 \Rightarrow \lg$ - определен.

Выпишем несколько пар, увеличивая y и проверим по критерию.

$\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$; $10^{-3}\cdot 3^8=\frac{81^2}{1000}>1 \Rightarrow$ Ok.

$\begin{cases} x=11 \\ y=5 \end{cases}$; $10^{-5}\cdot 3^{11}=\frac{81^2\cdot 27}{100000}=\frac{6561\cdot 27}{100000}>1 \Rightarrow$ Ok.

$\begin{cases} x=14 \\ y=7 \end{cases}$; $10^{-7}\cdot 3^{14}=\frac{81^3\cdot 9}{10^7}=\frac{4782969}{10000000}<1 \Rightarrow$ не Ok $\Rightarrow$ max $y=5$

Если $y\downarrow$, и $y<0$, тогда $10^{-y}\cdot 3^x>1$, т.к. $\frac{1}{10^y}<1$ и $\frac{10^y}{3^x}>1$

$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$; $10^1\cdot 3^2=90>1 \to$ Ok.

перебор четырех пар не доказывает, что y_{max}!

Ответ: $(x; y_{max}) \to \{11; 5\}$.

недостаточное обоснование!

1

ШИФР: _____
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада „Юниор"

Работа по ~~[illegible]~~ математике

Дата 06-04-24

Вариант № 2

Площадка написания: Нияу Мифи г Москва

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

№3

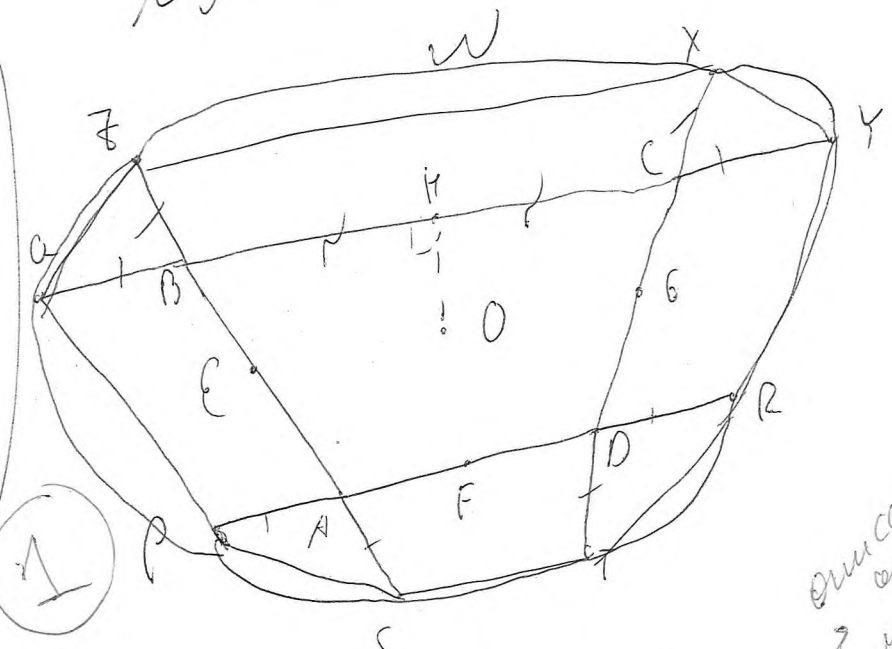
Дано: ABCD

ABCD - выпуклый

$\rho = (2+\frac{a}{2})$, где a - длина стороны

$R_\omega = \frac{\sqrt{26}}{2}$

S_{ABCD} - ?



1

$QB = BZ = AP = AS = DT = DR = CX = CY = 2$

O - центр опис окр

$OY = QQ$ - радиусы ⇒ H - основание высоты OH с $\triangle OYQ$ - р/б,

Тогда $\triangle OBC$ - р/б; $OC = OB$, аналогично

$OB = OA$; $OA = OD$; $OD = OC$, значит $OA = OB = OC = OD$ ⇒

⇒ O - центр окружности, описанной около ABCD

ABCD - квадрат (по теореме о пересек. хордах)

описать окружность можно не только около квадрата!

? $S_{ABCD} = R^2 = \frac{26}{4} = \cancel{4,5}\ 6,5$ $S_{ABCD} = 1$

Лист 2 из 2

? Ответ: ~~6,5~~ 1.

нет расчетов!

где показано, что выполнены её условия?

235403
Регистрационный номер

Фамилия Горбань
Имя Максимилиан
Отчество Владимирович

601
(не заполнять)

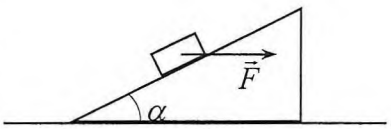
Подпись

«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

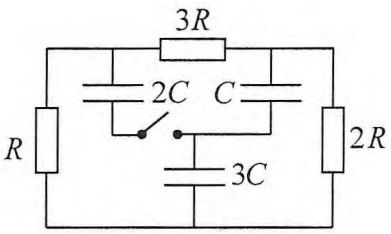
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Олимпиада по физике, Заключительный этап, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0{,}5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Председатель методической комиссии, 2024 г.

ШИФР: 601
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада "Юниор"

Работа по физике

Дата 06.04.24

Вариант № _____

Площадка написания: Кашу Мифи

ФИО и рег. номер не указывать!

ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись
5	5	2				12	

Задача 1

$V = 20$ л
$V_0 = 0{,}5$ л
$t = 20°C = 293$ К
$p_m = 10^6$ Па
$\rho = 800$ кг/м^3
$\mu = 0{,}028$ кг/моль
$R = 8{,}31$

T_m - ?

1) $m_{N_2} = \rho \cdot V_0 = 0{,}4$ кг

2) $\nu_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{\mu} = \frac{\rho V_0}{\mu} = 14{,}3$ моль.

3) Азот, когда нагреется будет представлять собой идеальный газ, поэтому справедливо уравнение Клапейрона.

$p_x \cdot V_{(20л)} = \nu_{N_2} \cdot R \cdot T$

выразим p_x: $p_x = \frac{\nu R T}{V}$; подставим $T = 293$ К, комнатная, $V = 20$ л $= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3

$p_x = 14{,}3 \cdot 8{,}31 \cdot 293 : 50 \approx 1845900$ Па $> 10^6$, значит баллон в итоге разорвет до достижения азотом комнатной температуры.

Теперь найдем T_x: $T_x \to p_m$; $p_m \cdot V = \nu R T_x$

$T_x = \frac{p_m V}{\nu R} = \frac{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{14{,}3 \cdot 8{,}31} \approx 168{,}1$ К или $-94{,}9$ °C

+

+5

Ответ: баллон разорвет при $T_x \approx -94{,}9$ °C.

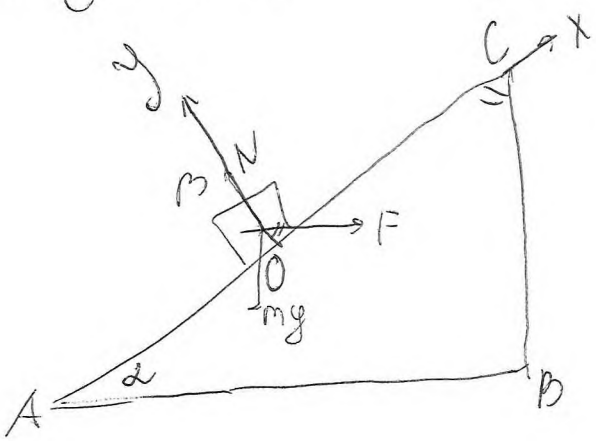
Задача 2.

Дано:

k, m, трение нет

$\vec{a} \uparrow\uparrow OY$

F - ?



1) Угол отклонения двух дуг равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, как углы со взаимно-перпендикулярными сторонами.

$\begin{cases} \bar{F} \perp CB \\ \bar{OY} \perp AC \end{cases}$

2) Из условия задачи о направлении $\bar{a}_{полн}$, можно сделать вывод, что $a_x = 0$, тогда $a_y = a$ и справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} OX: \; F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - mg\sin\alpha = 0 \quad (1) \\ OY: \; ma - mg\cos\alpha - F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Тогда из (1): $F \cdot \cos\alpha = mg\sin\alpha$

$$F = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Из (2): $ma - mg\cos\alpha - mg\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = 0$

$$a = g\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$a = g \cdot \sec\alpha$$

В проекциях на OY, сила нормальной реакции опоры и вес скомпенсированы по III-ему Ньютона.

$$|F| = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha \oplus \bar{5}$$

Ответ: $|a| = g \cdot \sec\alpha$.

ШИФР: 601
(не заполнять)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Юниор»

Работа по физике

Дата 06.04.24

Вариант № _____

Площадка написания: НИЯУ МИФИ

ФИО и рег. номер не указывать!

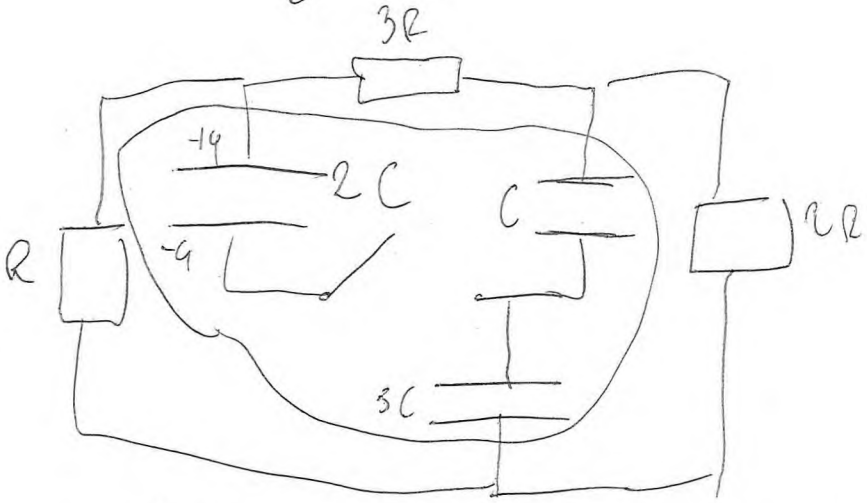
ОЦЕНКА
(не заполнять)

1	2	3	4	5	6	ИТОГО	Подпись

Задача 3

Дано:
$R, 2R, 3R$
$C, 2C, 3C$

Q_R, Q_{1R}, Q_{3R} - ?



1) В выделенном "острове" из трех конденсаторов заряд будет сохраняться

$q_0 = q = q_к$.

2) По закону сохранения энергии: $Q = Q_{3R} + Q_{1R} + Q_R = \Delta W_C$.

3) $W_0 = \frac{q^2}{4C}$

4) $Q_i \sim R \Rightarrow Q_{3R} : Q_{1R} : Q_R = 3 : 2 : 1$

5) Заряды будут перераспределены следующим образом: $\frac{q}{3} \to 2C$; $\frac{q}{2} \to 3C$; $\frac{q}{6} \to C$ (так как и ранее)

6) Тогда ~~$\Delta W_к$~~ $W_к = \frac{q^2}{36C} + \frac{q^2}{24C} + \frac{q^2}{12C} = \frac{q^2}{12C}$

7) $|\Delta W_C| = \frac{q^2}{4C} - \frac{q^2}{12C} = Q = \frac{q^2}{6C}$ (+)

8) Тогда $Q_{3к} = \frac{3}{6} Q = \frac{q^2}{12C}$

$Q_{2к} = \frac{2}{6} Q = \frac{q^2}{18C}$

$Q_к = \frac{Q}{6} = \frac{q^2}{36C}$

$Q_{3к} = \frac{q^2}{12C}$

Ответ: $Q_{2к} = \frac{q^2}{18C}$ (—) 2

$Q_к = \frac{q^2}{36C}$