Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса 2022-2023 учебного года, 10 класс

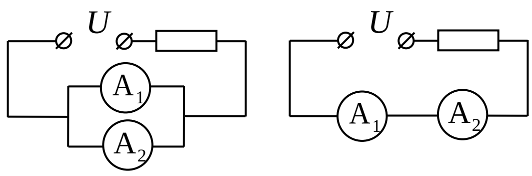
1. Решить уравнение $x^4 - 2[x] = 15$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число не превосходящее x.

2. Сколько существует различных несократимых дробей вида $\frac{n}{m}$, десятичная запись которых представляется периодической дробью вида $0,b8(a_1a_2)$, где a_1, a_2, b – цифры?

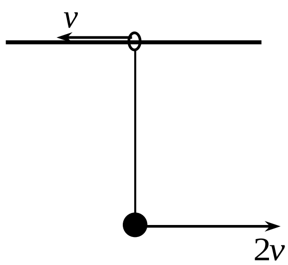
3. Длины сторон BC, AC и AB треугольника ABC равны 2, 3 и 4 соответственно. Точки M и N расположены на сторонах AB и AC на расстоянии 2 от вершин B и C соответственно. Точки P и Q находятся на продолжении сторон AC и BC за вершину C на расстоянии 4 от вершин A и B. Найти отношение длин отрезков PQ и MN.

4. Собственный объем сыпучего материала – щебня, песка, крупы – можно измерить следующим образом. Сыпучий материал помещают в цилиндрический сосуд и герметично закрывают подвижным поршнем. Затем измеряют давления газа p_1 и p_2 в сосуде при двух различных значениях объема сосуда под поршнем - V_1 и V_2 и неизменной температуре. Найти по этим данным собственный объем сыпучего материала.

5. К источнику напряжения U подключили резистор с неизвестным сопротивлением и параллельно друг другу два амперметра A_1 и A_2 (см. левый рисунок). В этом случае амперметры показывают силу тока $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Затем эти амперметры вместе с тем же резистором соединяют последовательно и подключают к источнику (правый рисунок). При этом амперметр A_1 показывает силу тока $I_1' = 4$ А. Какой ток будет течь в цепи из тех же источника и резистора?



6. К концам невесомого нерастяжимого стержня прикреплены маленькое тело и массивное кольцо одинаковых масс. Кольцо может без трения двигаться по горизонтальной жесткой спице в поле силы тяжести (см. рисунок). В некоторый момент кольцу и телу сообщили скорости v и $2v$, направленные горизонтально вдоль стержня и противоположно друг другу (см. рисунок). Известно, что когда тело понимается на максимальную высоту, стержень составляет угол α со спицей. Найти длину стержня. Спица очень длинная.

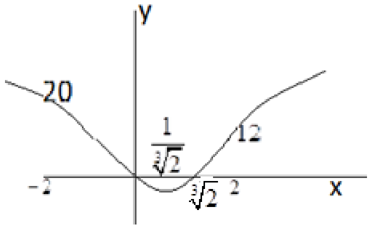


Решения и критерии оценивания

1. Покажем, что уравнение не имеет решений для $x \le -2$ и $x \ge 3$. Действительно, пусть $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x, $0 \le \{x\} < 1.$. Перепишем уравнение в виде $x^4 - 2x + 2\{x\} = 15$. Отсюда получаем

$13 < x^4 - 2x \le 15 \quad (*)$.

График функции $f(x) = x^4 - 2x$ изображен на рис



При $x \le -2$ выражение $x^4 - 2x$ принимает значение большие 20 и неравенству (*) не удовлетворяют. Аналогично, при $x \ge 3$ выражение $x^4 - 2x$ не меньше 75 и неравенство (*) не выполнено. Таким образом, возможные значения для $[x]$ равны $-2, -1, 0, 1, 2$.

Случай 1. $[x] = -2 \to x^4 = 11 \to x_1 = -\sqrt[4]{11}, [x_1] = -2$.

Случай 2. $[x] = -1 \to x^4 = 13 \to x_2 = \pm\sqrt[4]{13}, [x_2] \ne -1, \varnothing$.

Случай 3. $[x] = 0 \to x^4 = 15 \to x_3 = \pm\sqrt[4]{15}, [x_3] \ne 0, \varnothing$.

Случай 4. $[x] = 1 \to x^4 = 17 \to x_4 = \pm\sqrt[4]{17}, [x_4] \ne 1, \varnothing$.

Случай 5. $[x] = 2 \to x^4 = 19 \to x_5 = \sqrt[4]{19}, [x_5] = 2$.

Таким образом, решением задачи являются $x = -\sqrt[4]{11},\ x = \sqrt[4]{19}$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Умеет работать с функциями {x}и [x]	0,5 балла
2. Получена оценка значений x при которых нет решений	1 балл
3. Арифметическая ошибка при рассмотрении $[x]$ из множества $-2, -1, 0, 1, 2$.	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

2. Запишем условие задачи $\frac{n}{m} = 0, b8(a_1 a_2)$. Перепишем уравнение в виде

$$100 \cdot \frac{n}{m} = b8 + 0,(a_1 a_2) = b8 + \frac{a_1 a_2}{99}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{n}{m} = \frac{(10b + 8) \cdot 99 + 10a_1 + a_2}{9900}.$$

Знаменатель дроби разлагается на простые множители $9900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$. Число $(10b + 8) \cdot 99$ делится на $2, 3, 11$ и имеет при делении на 5 остаток 2 при любых $b = 0, 1, \ldots, 9$. Тогда для не сократимости дроби $\frac{m}{n}$, число $a = 10a_1 + a_2$ не должно делится на $2, 3, 11$, а при делении на 5 не давать в остатке 3 (в противном случае дробь сократима на 5). Таким образом, допустимыми значениями для a_2 являются цифры $1, 5, 7, 9$ при этом a_1 должно удовлетворять условиям: 1) $a_1 + a_2$ не кратно 3 (нет делимости на 3); 2) $a_1 \ne a_2$ (нет делимости на 11).

Случай $a_2 = 1$. Допустимой для этого случая цифрой a_1 является $0, 3, 4, 6, 7, 9$ (6 вариантов).

Случай $a_2 = 5$. Допустимой для этого случая цифрой a_1 является $0, 2, 3, 6, 8, 9$ (6 вариантов).

Случай $a_2 = 7$. Допустимой для этого случая цифрой a_1 является $0,1,3,4,6,9$ (6 вариантов).
Случай $a_2 = 9$. Допустимой для этого случая цифрой a_1 является $1,2,4,5,7,8$ (6 вариантов).
Таким образом, для каждого из 10 допустимых значений b возможны 24 варианта числа $a = 10a_1 + a_2$. Всего 240 дробей

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Получил выражение для дроби	0,5 балла
2. Есть продвижения в исследовании несократимости дроби	1 балл
3. Арифметическая ошибка при подсчете количества несократимых дробей, удовлетворяющих условиям задачи	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

3. Пусть $a = 2, b = 3, c = 4$ длины сторон BC, AC и AB треугольника соответственно. Из условий задачи вытекает векторное равенство:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{c}{a}\cdot\overrightarrow{CN} + \frac{c}{a}\cdot\overrightarrow{MB} + \frac{c}{a}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{c}{a}\cdot\left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{c}{a}\cdot\overrightarrow{MN}.$$

Таким образом, отрезки PQ и MN параллельны и их длины относятся как $c : a = 4 : 2 = 2$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Верный чертёж, есть продвижение в решении задачи	0,5 балла
2. Получено векторное равенство или верно применена теорема косинусов	1 балл
3.Арифметическая ошибка	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

4. Поскольку объем воздуха в сосуде равен объему цилиндра V_1 минус собственный объем v сыпучего материала, закон Клапейрона-Менделеева для воздуха в сосуде в первом случае дает

$$p_1\left(V_1 - v\right) = \nu RT$$

где ν - количество вещества воздуха в сосуде, R - универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура. Аналогично во втором случае

$$p_2\left(V_2 - v\right) = \nu RT$$

Деля эти уравнения друг на друга, находим

$$v = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 - p_2}$$

Рассмотренное решение имеет смысл, если при $p_1 > p_2$, $p_1 V_1 > p_2 V_2$ и наоборот.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – использование закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
2. Правильный закон Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
3. Правильный закон Клапейрона-Менделеева для начального и конечного состояний (с исключением собственного объема сыпучего материала) – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Очевидно, амперметры имеют разные сопротивления, поскольку при параллельном включении в цепь через них текут разные токи. Из закона Ома для амперметров следует, что отношение их сопротивлений равно

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{I_2}{I_1}=\frac{3}{2} \tag{1}$$

Поскольку ток, текущий через источник в первом случае равен I_1+I_2, закон Ома для участка цепи в первом случае дает

$$r+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{U}{I_1+I_2}$$

или с использованием (1)

$$r+\frac{3}{5}R_2=\frac{U}{I_1+I_2} \tag{2}$$

Во втором случае ток через оба амперметра и источник будут одинаковыми (последовательное соединение элементов). Поэтому

$$I_2'=I_1'=4\ \text{А}$$

Закон Ома для второго случая дает

$$r+R_1+R_2=\frac{U}{I_1'}$$

или с использованием (1)

$$r+\frac{5}{2}R_2=\frac{U}{I_1'} \tag{3}$$

Исключая из системы уравнений (2)-(3) сопротивление второго амперметра, получим

$$r=\frac{U\left[25I_1'-6\left(I_1+I_2\right)\right]}{19I_1'\left(I_1+I_2\right)}$$

Отсюда находим ток в цепи, если источник замкнут на резистор

$$I=\frac{U}{r}=\frac{19I_1'\left(I_1+I_2\right)}{25I_1'-6\left(I_1+I_2\right)}=12{,}7\ \text{А}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное отношение сопротивлений амперметров – 0,5 балла
2. Правильный закон Ома в первом случае – 0,5 балла
3. Правильный закон Ома во втором случае – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. В момент подъема на максимальную высоту тело движется горизонтально. Поэтому из условия нерастяжимости стержня заключаем, точно такая же скорость (их проекции на направление стрежня должны быть одинаковы, а скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту направлены одинаково). Из закона сохранения импульса на горизонтальное направление имеем

$$2mv - mv = 2mv_1$$

где v_1 - скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту. Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = 2\frac{mv_1^2}{2} + mgl(1 - \sin\alpha)$$

где l - длина стержня. Отсюда находим

$$l = \frac{9v^2}{4g(1 - \sin\alpha)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Утверждение (с обоснованием из условия нерастяжимости стержня и того факта, что скорость тела в момент подъема тела на максимальную высоту горизонтальна), что скорости тела и кольца в этот момент одинаковы – 0,5 балла
2. Правильно найдена скорость тела и кольца в момент подъема на максимальную высоту (из закона сохранения импульса) – 0,5 балла
3. Правильный закон сохранения энергии для момента подъема тела на максимальную высоту – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: