

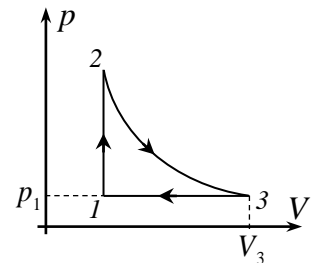
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2022-2023 учебного года, 11 класс**

1. Решить уравнение $\log_x 2 + \log_{x+2} 2 + \log_{x+3} 2 = \frac{1}{\log_2 x + \log_2(x+2) + \log_2(x+3)}$.

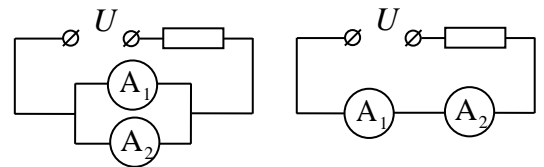
2. Петя решил спросить совет у своих друзей Миши и Маши приобретать ему собаку или нет. Вероятность того, что Миша скажет «да» равна 0,6, Маша – 0,4. Если советы друзей совпадут, Петя им последует. Если нет, то Петя доверится совету Миши с вероятностью 0,8. С какой вероятностью в доме Пети появится собака, если все советы даются друзьями только в форме «да» или «нет»?

3. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Все боковые грани пирамиды равнонаклонные к основанию. Сфера радиуса 1 с центром на основании пирамиды касается сторон треугольника ABC и двух боковых ребер DA и DC . Найти наименьшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

4. С одноатомным идеальным газом проходит следующий циклический процесс: 1-2 изохорическое нагревание, 2-3 – изотермическое расширение, 3-1 – изобарическое сжатие (см. график процесса в координатах «давление-объем»). Для этого процесса известны: давление газа в состоянии 1 – p_1 , объем газа в состоянии 3 – V_3 (показаны на рисунке) и количество теплоты, которое газ получил в процессе 1-2 – Q . Найти давление и объем газа в состоянии 2.

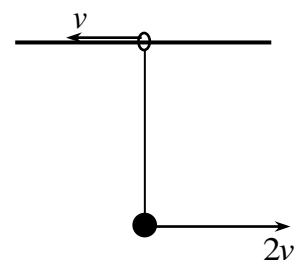


5. К источнику электрического напряжения U подключили резистор с неизвестным сопротивлением и параллельно друг другу два амперметра A_1 и A_2 (см. левый рисунок). В этом случае амперметры показывают силу тока $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Затем эти амперметры вместе с тем же



резистором соединяют последовательно и подключают к источнику (правый рисунок). При этом амперметр A_1 показывает силу тока $I'_1 = 4$ А. Какой ток будет течь в цепи из тех же источника и резистора, но без амперметров?

6. К концам невесомого нерастяжимого стержня прикреплены маленькое тело и массивное кольцо одинаковых масс. Кольцо может без трения двигаться по горизонтальной жесткой спице в поле силы тяжести (см. рисунок). В некоторый момент кольцу и телу сообщили скорости v и $2v$, направленные горизонтально вдоль стержня и противоположно друг другу (см. рисунок). Известно, что когда тело поднимается на максимальную высоту, стержень составляет угол α со спицей. Найти длину стержня. Спица очень длинная.



Решения и критерии оценивания

1. Введем обозначения: $a = \log_2 x, b = \log_2(x+2), c = \log_2(x+3)$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a(a+b+c)} + \frac{b+c}{bc} = 0 &\Leftrightarrow (b+c) \cdot \frac{bc+a(a+b+c)}{abc(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (b+c) \cdot \frac{a^2+(b+c)a+bc}{abc(a+b+c)} = \frac{(b+c)(a+b)(a+c)}{abc(a+b+c)} = 0. \end{aligned}$$

Случай 1. $b+c=0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$\begin{cases} \log_2(x+2) + \log_2(x+3) = 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \rightarrow (x+2)(x+3) = 1 \rightarrow \emptyset$$

Случай 2. $a+b=0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(x+2) = 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \rightarrow x(x+2) = 1 \rightarrow x = -1 + \sqrt{2}$$

Случай 3. $a+c=0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(x+3) = 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \rightarrow x(x+3) = 1 \rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

Таким образом, $x \in \left\{ -1 + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{13}-3}{2} \right\}$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- | | |
|---|-----------|
| 1. Продемонстрировано знание свойств логарифмической функции, сделаны разумные преобразования левой и правой частей равенства | 0,5 балла |
| 2. Найдена часть решений или не отброшены посторонние корни | 1 балл |
| 3. Арифметическая ошибка | 1,5 балла |
| 4. Решена верно | 2 балла |

2. Пусть вероятность того, что Миша скажет «да» равна p_1 , а вероятность того, что Маша скажет «да» равна p_2 . Введем следующие события: событие A в доме Пети появится собака, событие H_1 Миша «да», Маша «да»; событие H_2 Миша «да», Маша «нет»; событие H_3 Миша «нет», Маша «да»; событие H_4 Миша «нет», Маша «нет». Событие A реализуется вместе с событиями H_1, H_2, H_3 и H_4 . Найдем вероятности событий H_1, H_2, H_3 и H_4 :

$$P(H_1) = p_1 \cdot p_2, P(H_2) = p_1 \cdot (1 - p_2), P(H_3) = (1 - p_1) \cdot p_2, P(H_4) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2).$$

Кроме того, из условий задачи следует, что

$$P(A/H_1) = 1, P(A/H_2) = q, P(A/H_3) = (1 - p_1) \cdot p_2, P(A/H_4) = 1 - q, P(A/H_3) = 1 - q, P(A/H_1) = 0.$$

Тогда по формуле полной вероятности

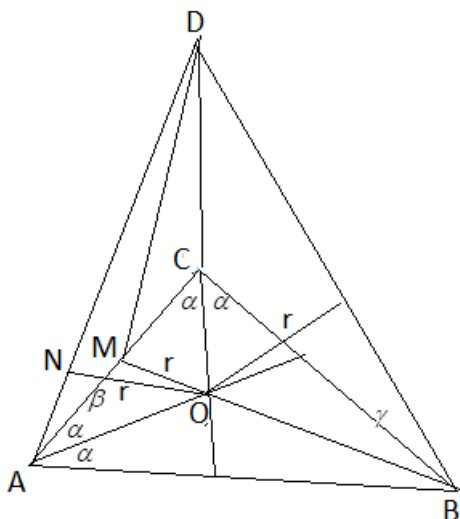
$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^4 P(H_k) \cdot P(A/H_k) = p_1 p_2 + q p_1 (1 - p_2) + (1 - q) p_2 (1 - p_1) = \\ &= p_1 p_2 + q p_1 - q p_1 p_2 + (1 - q) p_2 - (1 - q) p_1 p_2 = q \cdot p_1 + (1 - q) p_2 \end{aligned}$$

Так как по условию задачи $p_1 = 0,6, p_2 = 0,4, q = 0,8$, то

$$P(A) = q \cdot p_1 + (1 - q) p_2 = 0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,56.$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Применена формула произведения вероятностей	0,5 балла
2. Выделены благоприятные события и подсчитаны их вероятности	1 балл
3. Арифметическая ошибка при подсчете полной вероятности	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

Задача 3.

Введем обозначения: r – радиус сферы с центром на основании пирамиды и касающейся сторон треугольника ABC и двух боковых ребер DA и DC ; 2α – угол CAB , β – угол наклона бокового ребра AD к основанию; M – середина AC .

По условию задачи сечение сферы плоскостью основания пирамиды – окружность вписанная в треугольник ABC и ее радиус равен r . Пусть O – центр этой окружности, это точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Следовательно точка O лежит на медиане BM треугольника ABC , кроме того точка O является центром сферы, а отрезок DO является высотой пирамиды $ABCD$.

Выразим площадь треугольника ABC через r и α :

$$AM = r \operatorname{ctg} \alpha, AO = \frac{r}{\sin \alpha}, MB = AM \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Тогда $S_{ABC} = AM \cdot MB = r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$.

Найдем высоту DO пирамиды $ABCD$. Заметим, что треугольники ANO и AMO равны (по катету и гипотенузе), поэтому угол $NAO = \alpha$. Имеем

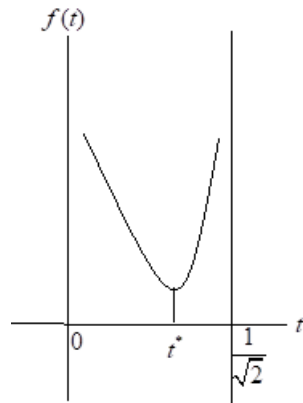
$$H = DO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

Запишем формулу для объема пирамиды $ABCD$ через r и α :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r^3}{3} \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2r^3}{3} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2r^3}{3} \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)}. \end{aligned}$$

Введем обозначение: $t = \sin \alpha \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $\frac{3V}{2r^3} \equiv f(t) = \frac{1-t^2}{t(1-2t^2)}$. Таким образом, нам нужно

исследовать функцию $f(t)$ на интервале $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ на экстремум.



Вычислим производную $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{-2t^2(1-2t^2) - (1-t^2)(1-6t^2)}{t^2(1-2t^2)^2} = -\frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{t^2(1-2t^2)^2}$$

Найдем критические точки функции $f(t)$:

$$2t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим следующие корни

$$t_1 = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{4} < t_2 = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{4} < t_3 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{4} < t_4 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{4}.$$

Из них только $t_3 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2} \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Заметим, что в точке $t = t^*$ функция принимает минимальное значение. Это следует из того, что

$$f'(t) = -\frac{2(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{t^2(1-2t^2)^2}$$

при $t < t_3$ отрицательна, а при $t > t_3$ положительна. Вычислим $f(t_3)$:

$$\begin{aligned} f(t_3) &= \frac{1-t^2}{t(1-2t^2)} \Big|_{t=t_3} = \frac{1-\frac{5-\sqrt{13}}{4}}{t_3 \left(1-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{5-\sqrt{13}}(\sqrt{13}-3)} = \\ &= \frac{(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}+3)}{4\sqrt{5-\sqrt{13}}} = \frac{5+\sqrt{13}}{2\sqrt{5-\sqrt{13}}} = \frac{(5+\sqrt{13})^{3/2}}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } V_{\min} = \frac{2r^3}{3} \cdot f(t^*) = \frac{2r^3}{3} \cdot \frac{(5+\sqrt{13})^{3/2}}{4\sqrt{3}} = \frac{r^3}{2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)^{3/2}.$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- | | |
|--|-----------|
| 1. Верный чертеж | 0,5 балла |
| 2. Найдена функция объема для исследования на экстремум | 1 балл |
| 3. Арифметическая ошибка при исследовании функции объема | 1,5 балла |
| 4. Решена верно | 2 балла |

4. Пусть давление и объем газа в состоянии 2 равны p и V . Поскольку количество теплоты, полученное газом в изохорическом процессе, равно изменению внутренней энергии газа в этом процессе, то

$$Q = \frac{3}{2}(vRT_2 - vRT_1)$$

где v - количество вещества газа, R - универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 - температуры газа в состояниях 2 и 1. Используя закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$Q = \frac{3}{2}(pV - p_1V)$$

С другой стороны, по закону Бойля-Мариотта для изотермического процесса 2-3

$$pV = p_1V_3.$$

Поэтому

$$Q = \frac{3}{2}(p_1V_3 - p_1V)$$

Отсюда находим объем газа в состоянии 2 (он же – объем газа в состоянии 1):

$$V = V_3 - \frac{2Q}{3p_1}.$$

Теперь из закона Бойля-Мариотта находим давление газа в состоянии 2:

$$p = \frac{p_1V_3}{V} = \frac{p_1V_3}{V_3 - \frac{2Q}{3p_1}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильное использование первого закона термодинамики для изохорического процесса – 0,5 балла**
 - 2. Правильное использование закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла**
 - 3. Правильно найден объем газа в состояниях 2 и 1 – 0,5 балла**
 - 4. Правильно найдено давление газа в состоянии 2 – 0,5 балла**
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

5. Очевидно, амперметры имеют разные сопротивления, поскольку при параллельном включении в цепь через них текут разные токи. Из закона Ома для амперметров следует, что отношение их сопротивлений равно

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Поскольку ток, текущий через источник в первом случае равен $I_1 + I_2$, закон Ома для участка цепи в первом случае дает

$$r + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U}{I_1 + I_2}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{3}{5}R_2 = \frac{U}{I_1 + I_2} \quad (2)$$

Во втором случае ток через оба амперметра и источник будут одинаковыми (последовательное соединение элементов). Поэтому

$$I'_2 = I'_1 = 4 \text{ А}$$

Закон Ома для второго случая дает

$$r + R_1 + R_2 = \frac{U}{I'_1}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{5}{2}R_2 = \frac{U}{I'_1} \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (2)-(3) сопротивление второго амперметра, получим

$$r = \frac{U[25I'_1 - 6(I_1 + I_2)]}{19I'_1(I_1 + I_2)}$$

Отсюда находим ток в цепи, если источник замкнут на резистор

$$I = \frac{U}{r} = \frac{19I'_1(I_1 + I_2)}{25I'_1 - 6(I_1 + I_2)} = 12,7 \text{ А}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное отношение сопротивлений амперметров – 0,5 балла

2. Правильный закон Ома в первом случае – 0,5 балла

3. Правильный закон Ома во втором случае – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. В момент подъема на максимальную высоту тело движется горизонтально. Поэтому из условия нерастяжимости стержня заключаем, точно такая же скорость (их проекции на направление стержня должны быть одинаковы, а скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту направлены одинаково). Из закона сохранения импульса на горизонтальное направление имеем

$$2mv - mv = 2mv_1$$

где v_1 - скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту. Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = 2\frac{mv_1^2}{2} + mgl(1 - \sin \alpha)$$

где l - длина стержня. Отсюда находим

$$l = \frac{9v^2}{4g(1 - \sin \alpha)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Утверждение (с обоснованием из условия нерастяжимости стержня и того факта, что скорость тела в момент подъема тела на максимальную высоту горизонтальна), что скорости тела и кольца в этот момент одинаковы – 0,5 балла
 2. Правильно найдена скорость тела и кольца в момент подъема на максимальную высоту (из закона сохранения импульса) – 0,5 балла
 3. Правильный закон сохранения энергии для момента подъема тела на максимальную высоту – 0,5 балла
 4. Правильный ответ – 0,5 балла
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника

Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице: