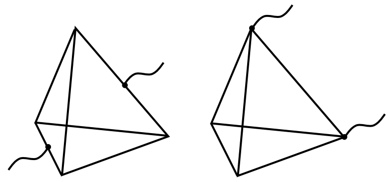
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2022-2023 учебного года, 9 класс

1. При каких целых a уравнение $x^2-(a+12)x+12a+3=0$ имеет только целые корни?

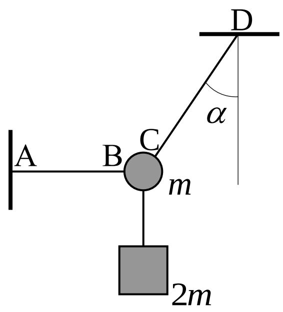
2. Петя написал в десятичной форме целое число, начинающееся с цифр 2022 и при этом делящееся на 2023. Какое наименьшее число мог написать Петя?

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Длина отрезка OE равна 1. Известно, что около четырехугольника $OECD$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности.

4. Из шести одинаковых кусков проволоки изготовили пирамиду и включили в электрическую цепь серединами двух противоположных ребер (см. левый рисунок). Оказалось, что сопротивление пирамиды при таком подключении равно R. Каким будет сопротивление пирамиды, если включить ее в электрическую цепь за две вершины (см. правый рисунок)?



5. Два груза массами m и $2m$ связаны тремя нитями так, как это показано на рисунке. При этом нить AB – горизонтальна, нить CD образует угол α с вертикалью. Найти силы натяжения нитей AB и CD. Нить AB перерезают. Найти ускорения грузов сразу после этого. Нити малорастяжимы и невесомы.



6. Тело бросили с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, Известно, что вектор скорости тела направлен под углом $\alpha=30°$ к горизонту через время t_1 и t_2 после броска. Найти максимальную высоту подъема тела над землей и расстояние от точки бросания до точки падения тела на землю. Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решения и критерии оценивания

1. Перепишем уравнение в виде

$$a(12-x)+x^2-12x+3=0$$

Число $x=12$ не может быть корнем этого уравнения. Разделим правую и левую части равенства на $x=12$:

$$a=\frac{x^2-12x+3}{x-12}=x+\frac{3}{x-12}$$

Поскольку a, x – целые, возможны 4 случая.

Случай 1. $x-12=1 \to x=13 \to a=16$.

Случай 2. $x-12=-1 \to x=11 \to a=8$.

Случай 3. $x-12=3 \to x=15 \to a=16$.

Случай 4. $x-12=-3 \to x=9 \to a=8$.

Таким образом, уравнение имеет только целые корни при $a=8, a=16$.

Критерии оценки задачи 1(максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Верно записана формула Виета	0,5 балла
2. Получено выражение для параметра a и это выражение записано в виде суммы целой и дробной частей	1 балл
3. Арифметические ошибки при анализе дробной части	1,5 баллов
4. Решена верно	2 балла

2. Все 200 написанных чисел можно представить в виде:

$$n-199, n-197, ..., n-1, n+1, n+3, ..., n+199,$$

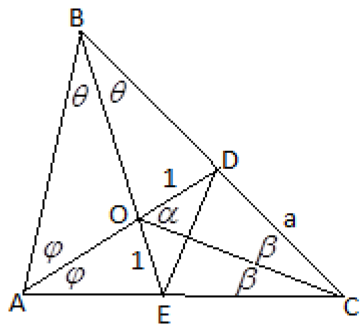
где n некоторое четное число, $n \geq 200$.

Сумма S этих чисел равна $200n$. Она делится на 56, если $n=14k, k \geq 15$. Наименьшее S соответствует $k=15$. Тогда $n=14 \cdot 15=210$, а $S_{\min}=200 \cdot 210=42000$.

Критерии оценки задачи 2(максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Ответ получен подбором	0,5 балла
2. Получено выражение для суммы S чисел и найдены значения n, при которых она делится на 56.	1 балл
3. Арифметическая ошибка при вычислении минимального значения S	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

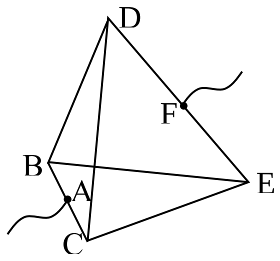
3. Введем обозначения: $\angle BAC=2\varphi$, $\angle ACB=2\beta, \angle ABC=2\theta$. Тогда $\angle DOE=\angle AOB=180^0-\varphi-\theta$. Так как около четырехугольника $OECD$ можно описать окружность, то $180^0-\varphi-\theta+2\beta=180^0$. Отсюда найдем $2\beta=\varphi+\theta$. Воспользуемся теоремой о том, что сумма углов в треугольнике равна 180^0: $2\varphi+2\theta+2\beta=180^0$. Отсюда получаем: $6\beta=180^0$ или $\beta=30^0$. Применим теорему синусов для треугольника OEC: $\frac{OE}{\sin\beta}=2R$. С учетом того, что длина отрезка OE равна 1, находим $R=1$.



Критерии оценки задачи 3(максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Построил чертеж, записал теоремы и свойства, необходимые для решения задачи	0,5 балла
2. Верно нашёл угол ACB	1 балла
3. Арифметическая ошибка	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

4.. Из симметрии цепи, показанной на левом рисунке условия, следует, что в каждом разветвлении ток делится пополам. Поэтому, если в точку A втекает ток I, сопротивление одного ребра r, то напряжения на всех проводниках, составляющих ребра тетраэдра являются следующими:



$$U_{AB} = U_{AC} = Ir/4\,,$$

$$U_{CD} = U_{CE} = U_{BE} = U_{BD} = Ir/4\,,\ U_{DF} = U_{EF} = Ir/4\,.$$

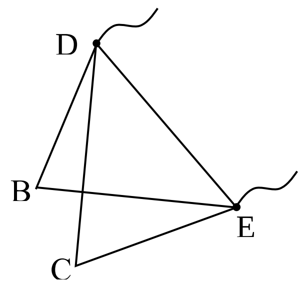
Поэтому напряжение между точками A и F равно

$$U_{AF} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DF} = \frac{3Ir}{4}$$

Отсюда находим, что сопротивление пирамиды, включенной за середины противоположных ребер, равно $3r/4$. Отсюда находим сопротивление ребра

$$r = \frac{4R}{3} \qquad (*)$$

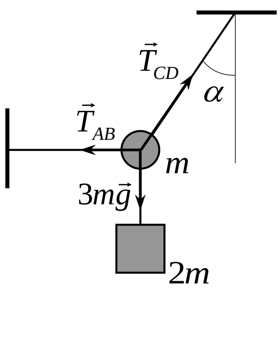
Если включить пирамиду за две вершины (D и E на рисунке), то противоположное ребро (BC) можно удалить, поскольку ток по нему не течет (оба направления BC и CB эквивалентны, поэтому току некуда течь). В результате цепь сводится к трем параллельно соединенным резисторам r, $2r$ и $2r$. Поэтому ее сопротивление равно $r/2$. Поэтому из формулы (*) получаем



$$R_{DE} = \frac{2R}{3}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использованы правильные формулы для токов, напряжений и сопротивлений при последовательном и параллельном соединении резисторов – 0,5 балла
2. Найдено сопротивление первой цепи и определено сопротивление одного ребра пирамиды – 0,5 балла
3. Выброшено (с обоснованием) ребро BC из второй цепи – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Найдем сначала силы, действующие во всех нитях в равновесии. На тело массы m действует сила тяжести $m\vec{g}$ и три силы натяжения нитей $\vec{T}_{AB}$, $\vec{T}_{CD}$ и сила натяжения нижней нити, равная $2m\vec{g}$ (см. рисунок). Поэтому условие равновесия этого тела в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления дает



$$T_{AB} = T_{CD}\sin\alpha$$
$$3mg = T_{CD}\cos\alpha$$

Из этих формул находим

$$T_{CD} = \frac{3mg}{\cos\alpha}, \qquad T_{AB} = 3mg\,\mathrm{tg}\alpha$$

Сразу после перерезания нити AB тело массой m начнет двигаться под действием двух сил - $3m\vec{g}$, направленной вертикально вниз, и $\vec{T}_{CD}$, направленной вдоль нити CD. При этом, поскольку скорость тела равна нулю, вектор его ускорения направлен перпендикулярно нити CD. А так как сила натяжения нижней нити сразу после перерезания нити AB не успеет измениться (для изменения сил натяжения тела должны переместиться), то второй закон Ньютона для тела массой m в проекциях на направление, перпендикулярное нити CD, дает

$$ma_m = 3mg\sin\alpha$$

Отсюда получаем

$$a_m = 3g\sin\alpha$$

Из-за того, что сила натяжения нити, связывающей тела, не меняется, ускорение тела массой $2m$ равно нулю

$$a_{2m} = 0$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Верно расставлены силы, действующие на тела – 0,5 балла
2. Верно определены силы натяжения – 0,5 балла
3. Утверждение, что сразу после перерезания силы не меняются – 0,5 балла
4. Правильные ответы для ускорений тел – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Поскольку траектория тела симметрична относительно верхней точки, время подъема $t_{под}$ тела на максимальную высоту лежит ровно посередине между моментами t_1 и t_2:

$$t_{под} = \frac{t_2 + t_1}{2}, \qquad (1)$$

а полное время движения $t_{полн}$ есть удвоенное время (1)

$$t_{полн} = t_2 + t_1, \qquad (2)$$

Из формулы (1) и закона изменения скорости тела для равноускоренного движения, находим изменение вертикальной проекции скорости тела за время подъема на максимальную высоту:

$$0 = v_{0,y} - \frac{g\left(t_2 + t_1\right)}{2}$$

где $v_{0,y}$ - проекция вектора начальной скорости на вертикальную ось. Отсюда находим вертикальную проекцию начальной скорости тела

$$v_{0,y} = \frac{g\left(t_2 + t_1\right)}{2}$$

Горизонтальную проекцию начальной скорости можно найти из следующих соображений. Поскольку от момента t_1 до момента подъема на максимальную высоту (т.е. за время $\left(t_2 - t_1\right)/2$) вертикальная проекция уменьшается до нуля, то, применяя закон движения для скорости к этому этапу движения, получим

$$0 = v_{1,y} - \frac{g\left(t_2 - t_1\right)}{2}$$

где $v_{1,y}$ - вертикальная проекция вектора скорости тела в момент времени t_1. Поэтому

$$v_{1,y} = \frac{g\left(t_2 - t_1\right)}{2}$$

Поэтому горизонтальная проекция скорости тела в этот момент есть

$$v_{1,x} = v_{1,y}\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{g\left(t_2 - t_1\right)}{2}\sqrt{3} = v_{0,x} \qquad (3)$$

А поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется, то в процессе всего движения она будет (3). Отсюда и формулы (2) находим дальность полета S

$$S = v_{0,x} t_{полн} = \frac{g\left(t_2 - t_1\right)}{2}\sqrt{3}\left(t_2 + t_1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} g\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Максимальную высоту подъема h можно найти, зная вертикальную проекцию начальной скорости

$$h = \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \frac{g\left(t_2 + t_1\right)^2}{8}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно найдены время подъема и полное время движения – 0,5 балла
2. Правильно найдена горизонтальная составляющая скорости и вертикальная составляющая начальной скорости – 0,5 балла
3. Правильно найдена максимальная высота подъема тела – 0,5 балла
4. Правильно найдена дальность полета тела – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: