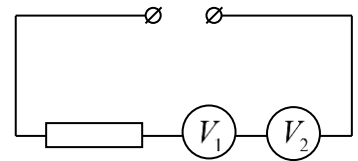


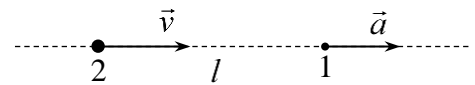
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,  
 профиль «Инженерные науки»,  
 Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса  
 2021-2022 учебного года, 9 класс**

1. Папа и мама пекут блины на плите, а их дети Петя и Вася их поедают. Папа может приготовить за час 70 блинов, мама – 100 блинов. Петя, если постарается, может съесть за 15 мин 10 блинов, а Вася в два раза больше. Через какое время на столе останутся не менее 20 несъеденных блинов?
2. В бумажном квадрате клетчатой бумаги, содержащем целое число клеток, вырезали дырку в форме квадрата, также состоящего из целого числа клеток. Сколько клеток содержал большой квадрат, если после вырезания на нем осталось 209 клеток?
3. Прямая, проходящая через любую точку  $D$  медианы  $BM$  треугольника  $ABC$  и параллельная стороне  $AB$ , пересекает прямую, проходящую через вершину  $C$  и параллельную  $BM$ , в точке  $E$ . Доказать, что  $BE = AD$ .

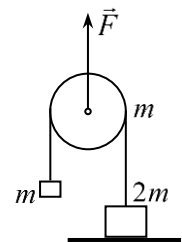
4. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, состоит из резистора и двух разных вольтметров. Если все элементы соединить последовательно и подключить к некоторому источнику напряжения (см. рисунок), то вольтметр  $V_1$  показывает напряжение  $U_1 = 8$  В, а вольтметр  $V_2$  - напряжение  $U_2 = 12$  В. Если последовательно соединить только вольтметры и подключить к тому же источнику, то вольтметр  $V_1$  покажет напряжение  $U_3 = 12$  В. Найти напряжение источника.



5. Два точечных тела могут двигаться вдоль одной и той же прямой. Первоначальное расстояние между телами равно  $l$ . Тела одновременно начинают двигаться в одном направлении следующим образом: первое тело движется из состояния покоя с постоянным ускорением  $a$ , второе, которое первоначально находилось за первым (см. рисунок), равномерно с некоторой скоростью  $v$ . При каких значениях  $v$ , второе тело не догонит первое?



6. Блок имеет массу  $m$ , которая сосредоточена в его оси. Через блок перекинули нить, концы которой прикрепили к телам массой  $m$  и  $2m$ . Блок удерживают так, что тело массой  $m$  висит, тело массой  $2m$  лежит на горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени блок начинают тянуть вверх, действуя на него силой  $\vec{F}$  (см. рисунок). При каком минимальном значении силы  $F$  тело с массой  $2m$  оторвется от поверхности? Нить нерастяжима и невесома. Ускорение свободного падения известно.



## Решения

**Задача 1.** Папа и мама пекут блины на плите, а их дети Петя и Вася их поедают. Папа может приготовить за час 70 блинов, мама – 100 блинов. Петя, если постарается, может съесть за 15 мин 10 блинов, а Вася в два раза больше. Через какое время на столе останутся не менее 20 несъеденных блинов?

**Ответ:** 24 мин

**Решение.** Обозначим производительность выпекания блинов  $p_1 = \frac{170}{60}$  блинов/мин, производительность поедания блинов  $p_2 = \frac{10+20}{15} = 2$  блина/мин.

За  $k$  мин на столе останется не менее  $q = k(p_1 - p_2)$  блинов:  $k \cdot \frac{5}{6} \geq 20 \rightarrow k \geq 24$ .

**Задача 2.** В бумажном квадрате клетчатой бумаги, содержащем целое число клеток, вырезали дырку в форме квадрата, также состоящего из целого числа клеток. Сколько клеток содержал большой квадрат, если после вырезания на нем осталось 209 клеток?

**Ответ:** 225 клеток

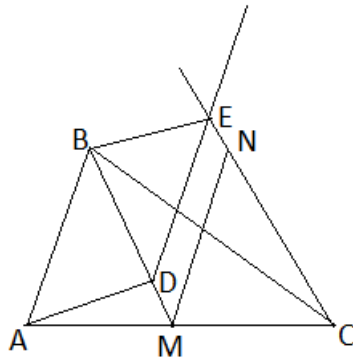
**Решение.** Сторона большого квадрата содержит  $n$  сторон клетки, у меньшего квадрата  $m$  сторон клетки. Тогда  $n^2 - m^2 = 209 \rightarrow (n - m)(n + m) = 209 = 11 \cdot 19$ .

Случай 1.  $\begin{cases} n + m = 209 \\ n - m = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 105 \\ m = 104 \end{cases}$  случай не реализуется из-за отсутствия дырки

Случай 2.  $\begin{cases} n + m = 19 \\ n - m = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 15 \\ m = 4 \end{cases}$

**Задача 3.** Прямая, проходящая через любую точку  $D$  медианы  $BM$  треугольника  $ABC$  и параллельная стороне  $AB$ , пересекает прямую, проходящую через вершину  $C$  и параллельную  $BM$ , в точке  $E$ . Доказать, что  $BE = AD$ .

**Решение.** Дополнительное построение: через точку  $M$  проводим прямую  $MN$ , параллельную  $DE$ . Фигура  $M DEN$  параллелограмм (по построению).



Треугольники  $ABM$  и  $MNC$  равны (по двум равным углам, прилежащим к равным сторонам  $AM$  и  $MC$ ). Тогда  $AB = MN = DE$  и четырехугольник  $ABED$  параллелограмм.  $AD$  и  $BE$  его противоположные стороны.

**Задача 4.** Пусть напряжение источника равно  $U$ , сопротивление первого вольтметра  $R_1$ , второго  $R_2$ . Поскольку в первом случае через них течет одинаковый ток

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

Во втором случае, отношение их показаний также равно отношению их сопротивлений. Поэтому показания второго вольтметра равны

$$U_4 = U_3 \frac{R_2}{R_1} = U_3 \frac{U_2}{U_1}$$

С другой стороны, напряжение источника равно сумме показаний вольтметров во втором случае. Поэтому

$$U = U_3 + U_4 = U_3 \left( 1 + \frac{U_2}{U_1} \right) = \frac{U_3 (U_1 + U_2)}{U_1} = 30 \text{ В}$$

(можно решать в числах: из первого условия следует, что сопротивление второго вольтметра составляют  $3/2$  от показания первого. Поэтому во втором случае он покажет 18 В, а сумма их показаний во втором случае и равна напряжению источника).

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

**1. Правильно найдено отношение сопротивлений вольтметров – 0,5 балла**

**2. Вывод, что напряжение источника равно сумме показаний вольтметров во втором случае – 0,5 балла**

**3. Правильно найдено показание второго вольтметра во втором случае – 0,5 балла**

**4. Правильный ответ – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**Задача 5.** В начальный момент времени первое тело имеет нулевую скорость, которая затем равномерно возрастает, так как первое тело движется равноускоренно. Находящееся позади второе тело, сразу имеет некоторую скорость  $v$ , которая в дальнейшем не меняется, так как второе тело движется равномерно. Поэтому в течение некоторого времени скорость второго тела будет больше скорости первого и расстояние между телами будет уменьшаться. Затем в некоторый момент времени скорость первого тела станет больше скорости второго и в дальнейшем будет продолжать увеличиваться (в то время как скорость второго по-прежнему остается неизменной). Поэтому если за то время, пока скорость второго тела больше скорости первого, оно не успеет догнать первое, оно никогда его не догонит.

Найдем разность координат первого и второго тел как функцию времени и исследуем знак этой функции: если при любых значениях времени  $t$  эта функция положительна, второе тело не догонит первое. Разность координат тел как функцию времени можно найти из уравнений движения для каждого тела.

Выберем ось  $x$  системы координат так, что она направлена вдоль направления движения тел, начало координат находится в начальном положении второго тела. Поскольку первое тело движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, зависимость его координаты от времени дается выражением:

$$x_1(t) = l + \frac{at^2}{2}$$

Второе тело движется равномерно, поэтому зависимость его координаты от времени дается выражением:

$$x_2(t) = vt$$

Отсюда находим разность координат тел  $x_1 - x_2$  как функцию времени

$$x_1 - x_2 = l + \frac{at^2}{2} - vt$$

Эта функция остается положительной при любых значениях времени  $t$ , если квадратное уравнение

$$\frac{at^2}{2} - vt + l = 0$$

не имеет корней, то есть когда дискриминант этого уравнения отрицательный

$$v^2 - 2al < 0$$

Таким образом, второе тело никогда не догоняет первое, если

$$v < \sqrt{2al}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Использованы правильный закон равноускоренного движения (для первого тела) и равномерного движения (для второго тела) – 0,5 балла
2. Правильное условие встречи тел – 0,5 балла
3. Правильный способ анализа условия встречи – отрицательность дискриминанта – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

**Задача 6.** Чтобы тело с массой  $2m$  оторвалось от поверхности, сила натяжения нити должна быть больше  $2mg$ . При минимальном значении силы  $F$  - равна  $2mg$ , при этом ускорение этого тела будет равно нулю. А поскольку масса блока сосредоточена только в его оси, сила натяжения нити, действующая на тело массой  $m$  будет такой же. И, следовательно, это тело будет подниматься вверх с ускорением  $a$ , которое можно найти из второго закона Ньютона для этого тела. В проекциях на вертикальную ось второй закон Ньютона для тела с массой  $m$  дает

$$ma = T - mg = 2mg - mg = mg \quad \Rightarrow \quad a = g$$

Очевидно, ускорение блока  $a_0$  будет в два раза меньше. Действительно, если блок перемещается на величину  $\Delta x$  вверх, то тело с массой  $m$  совершит перемещение  $2\Delta x$  (при условии, что второе тело имеет нулевое ускорение, как в рассматриваемом случае). Поэтому скорость блока в любой момент времени вдвое меньше скорости тела с массой  $m$ , поэтому и вдвое меньше его ускорение

$$a_0 = \frac{a}{2} = \frac{g}{2}$$

Следовательно, второй закон Ньютона для блока дает

$$m \frac{g}{2} = F - 2T = F - 4mg$$

Отсюда получаем окончательно для минимального значения силы  $F$ , при котором тело с массой  $2m$  оторвется от поверхности

$$F = \frac{9}{2}mg$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Правильная идея решения – при минимальной силе, для которой происходит отрыв тела от поверхности, сила натяжения нити должна равняться силе тяжести, действующей на тело  $2m$  – 0,5 балла**
- 2. Правильные ускорения тела массы  $m$  и блока – 0,5 балла**
- 3. Правильный второй закон для блока – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**Оценка работы участника**

**Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице перевода первичных баллов за оценку письменной части Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» Инженерной секции.**