

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,**

Решения и критерии оценивания

Задач олимпиадной части финала конкурса 2021-2022 учебного года

11 класс

1. Администрация разделила область на несколько районов по следующему принципу: население крупного района составляет более 8% населения области, и для любого крупного района найдутся два не крупных района с суммарно большим населением. На какое наименьшее число районов была разделена область?

2. Число x удовлетворяет условию:

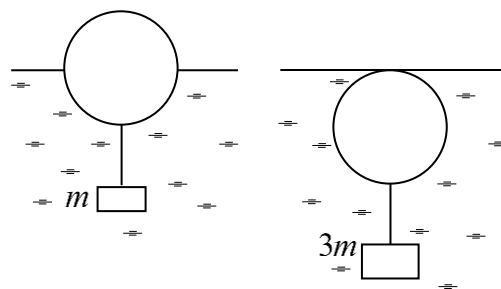
$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}.$$

Найти для таких x значение выражения

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

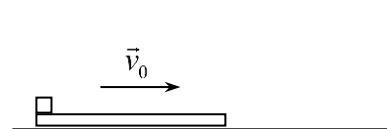
3. Точка M расположена на стороне CD квадрата так, что $CM : MD = 1 : 3$. Прямая AM пересекает описанную около квадрата окружность в точке E . Площадь треугольника ACE равна 14. Найти сторону квадрата.

4. Легкий шар плавает в воде. Если к шару привязать массивный груз, шар будет погружен в воду наполовину. Если массу груза увеличить втрое (при неизменной плотности), то шар погрузится в воду полностью и останется в таком положении. Найти плотность шара. Плотность воды ρ_0 известна.



5. С ν молями идеального одноатомного газа происходит процесс, в котором объем газа зависит от температуры по закону $V = \alpha\sqrt{T}$ (где α - некоторая постоянная). Какое количество теплоты нужно сообщить газу для двукратного увеличения его объема. Начальная температура газа T .

6. По гладкой горизонтальной поверхности перпендикулярно вертикальной стенке со скоростью v_0 движется доска длиной l с расположенным на ее конце точечным телом. Происходит абсолютно упругий удар доски о стенку. Считая, что удар происходит практически мгновенно, определить при каком коэффициенте трения между телом и доской доска остановится на максимальном расстоянии от стенки. Чему равно это максимальное расстояние? Массы доски и тела равны.



Решения

Задача 1. Администрация разделила область на несколько районов по принципу: население крупного района составляет более 8% населения области и для любого крупного района найдутся два не крупных района с суммарно большим населением. На какое наименьшее число районов была разделена область?

Ответ: 8 районов.

Решение. Число «мелких» районов не менее 2 по условию и их население составляет не более 8% от общего населения области. Покажем, что число районов в области не меньше 8. Если число районов в области не больше 7, но в ней не более 5 «крупных» районов с населением менее 16% в каждом. Тогда суммарное население области не может составить 100%. Действительно, $2 \cdot 8\% + 5 \cdot 16\% = 96\% < 100\%$. Таким образом, число районов в области не менее 8. Разбиение на 8 районов возможно, например, $8\% + 8\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% = 100\%$.

Задача 2. Число x удовлетворяет условию $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}$. Найти для таких x значение выражения

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

Ответ: $-\frac{11}{9}$.

$$\begin{aligned} \sin x \neq 0 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} &= \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x \rightarrow 3 - 4\sin^2 x = \frac{5}{3} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \\ \rightarrow \cos^2 x &= \frac{2}{3} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

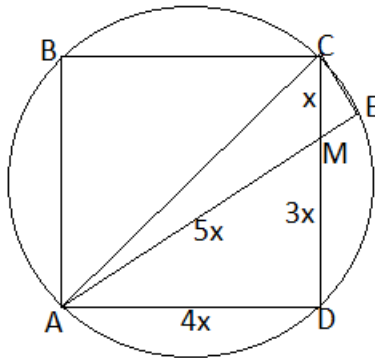
Решение. $\frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\cos(3x+2x)}{\cos x} = \frac{\cos(3x+2x)}{\cos x} = \frac{\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x}{\cos x} =$

$$\begin{aligned} \frac{(4\cos^3 x - 3\cos x)\cos 2x - 2\sin 3x \sin x \cos x}{\cos x} &= (4\cos^2 x - 3)\cos 2x - 2\sin 3x \sin x = \\ &= (2\cos 2x - 1)\cos 2x - \cos 2x + \cos 4x = (2\cos 2x - 1)\cos 2x - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = \\ &= \left(\frac{2}{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{11}{9}. \end{aligned}$$

Задача 3. Точка M расположена на стороне CD квадрата так, что $CM : MD = 1 : 3$. Прямая AM пересекает описанную около квадрата окружность в точке E . Площадь треугольника ACE равна 14. Найти сторону квадрата.

Ответ: 10.

Решение.



Треугольники AMD и CME подобные с коэффициентом подобия $k = 5$. Тогда

$$CE = \frac{4x}{5}, ME = \frac{3x}{5} \rightarrow AE = 5x + \frac{3x}{5} = \frac{28}{5}x.$$

Треугольник ACE прямоугольный, следовательно:

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{5} \cdot \frac{4}{5} x^2 = 14 \rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow AD = 4x = 10.$$

Задача 4. Пусть плотность шара равна ρ , объем V , а сила Архимеда, действующая на груз массой m , равна F_A . Поскольку во втором случае объем груза, как и его масса вырос в 3 раза, сила Архимеда, действующая на груз, возросла в 3 раза. Поэтому условия равновесия шара с грузом m и грузом $3m$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho V g + (mg - F_A) &= \rho_0 g \frac{V}{2} \\ \rho V g + 3(mg - F_A) &= \rho_0 g V \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь F_A - сила Архимеда, действующая на груз массой m ; во втором случае она увеличилась втрое по сравнению с первым, поскольку объем самого груза вырос также в 3 раза. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$2(mg - F_A) = \rho_0 g \frac{V}{2}$$

Отсюда находим объем шара

$$V = \frac{4(mg - F_A)}{\rho_0 g}$$

Подставляя теперь этот объем, например, в первое из уравнений (1), найдем плотность вещества шара

$$\rho = \frac{\rho_0}{4}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное использование закона Архимеда – 0,5 балла
2. Правильные условия плавания шара с телом массой m и массой $3m$ – 0,5 балла
3. Правильный объем шара – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

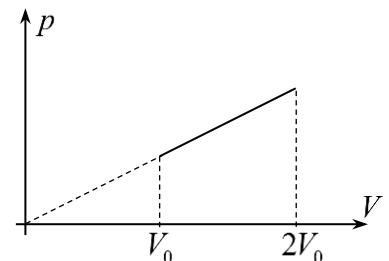
Задача 5. Исключая температуру газа T из закона Клапейрона-Менделеева, найдем, что давление и объем газа в данном процессе связаны следующим соотношением

$$pV = \nu RT = \nu R \left(\frac{V}{\alpha} \right)^2 \Rightarrow p = \frac{\nu R}{\alpha^2} V$$

(p - давление газа, V - его объем, ν - количество вещества газа, R - универсальная газовая постоянная). Пусть начальный объем газа V_0 . График этого процесса в координатах $p-V$ показан на рисунке.

Применим к этому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$



где Q - количества теплоты, сообщенное газу в этом процессе, ΔU - изменение его внутренней энергии, A - работа газа. Изменение внутренней энергии найдем через изменение его температуры с использованием связи объема и температуры в рассматриваемом процессе

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T) = \frac{3}{2} \nu R \left(\frac{4V_0^2}{\alpha^2} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} \right) = \frac{9}{2} \nu R \frac{V_0^2}{\alpha^2} = \frac{9}{2} \nu RT$$

где T_1 - конечная температура, T - начальная. Работу газа найдем как площадь под графиком процесса с использованием связи давления и объема

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu R}{\alpha^2} V_0 + \frac{\nu R}{\alpha^2} 2V_0 \right) (2V_0 - V_0) = \frac{3}{2} \frac{\nu R V_0^2}{\alpha^2} = \frac{3}{2} \nu RT$$

В результате из первого закона термодинамики получим

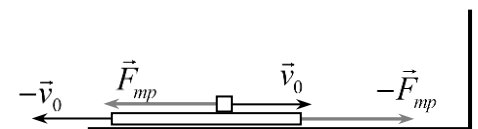
$$Q = 6\nu RT$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Доказательство (на основе закона Клапейрона-Менделеева), что в рассматриваемом процессе давление газа пропорционально объему – 0,5 балла**
- 2. Правильное использование первого начала термодинамики – 0,5 балла**
- 3. Правильная работа газа и правильное изменение его внутренней энергии – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ – 0,5 балла**

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Задача 6. В момент удара доска поменяет скорость на противоположную $-\vec{v}_0$ а тело будет продолжать двигаться в направлении стенки с той же скоростью \vec{v}_0 . Поэтому возникнет



проскальзывание тела относительно доски, и на тело и доску станет действовать тормозящая сила трения между доской и телом. В результате и доска, и тело будут замедляться (см. рисунок; векторы скоростей показаны тонкими черными стрелками, векторы сил – жирными серыми). Замедление движения тела и доски (с одинаковыми ускорениями, поскольку массы доски и тела равны) будут проходить до тех пор, пока тело не свалится с доски. После этого доска будет двигаться равномерно, поскольку поверхность, по которой она движется – гладкая. Следовательно, чтобы доска остановилась, тело должно остановиться на доске. А максимальному расстоянию между остановившейся доской и телом, очевидно, отвечает ситуация, когда тело остановится на самом правом краю доски.

Найдем время его движения до остановки в этом случае. В системе отсчета, связанной с доской тело имеет начальную скорость $2v_0$ и ускорение $2a$ (где $a = \mu g$ - ускорение тела и доски под действием силы трения; μ - коэффициент трения). Поэтому тело остановится относительно доски через время

$$t = \frac{v_0}{a},$$

пройдя расстояние

$$L = 2v_0t - \frac{2at^2}{2} = \frac{v_0^2}{a}$$

При максимальном удалении доски от стенки, это расстояние равно длине доски l . Отсюда находим коэффициент трения между телом и доской, при котором доска пройдет максимальное расстояние от стенки

$$\mu = \frac{v_0^2}{gl}$$

Само максимальное расстояние можно найти из следующих соображений. Доска и тело движутся одинаково, поэтому до остановки тела пройдут одинаковые расстояния, но в разные стороны. При этом тело относительно доски должно переместиться на всю ее длину. Поэтому перемещения тела и доски равны половине длины доски, и, следовательно, максимальное расстояние между остановившейся доской и телом равно половине ее длины - $l/2$.

- 1. Правильное качественное описание движения тела и доски после удара доски о стенку – 0,5 балла**
 - 2. Правильный вывод (с обоснованием), что доска остановится на максимальном расстоянии от стенки, когда тело остановится на ближайшем к стенке конце доски – 0,5 балла**
 - 3. Правильные законы равноускоренного движения для тела и доски (или правильное использование теоремы об изменении кинетической энергии для тела и доски) – 0,5 балла**
 - 4. Правильный ответ – 0,5 балла**
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника

Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице: